PMA - fiche 7

Viet Chi Tran, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`

Dans toute la fiche, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Chaîne de naissance et de mort)
On considère la chaîne de naissance et de mort $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont les transitions sont données pour $p \in]0,1[$ par :

$$P(0,1) = p, \quad P(0,0) = 1-p, \quad P(i,i+1) = p, \quad P(i,i-1) = 1-p, \text{ pour } i \in \mathbb{N}^*.$$

Soit T_0 le temps d'entrée en 0. On rappelle que dans la fiche 6, on avait montré que

$$\mathbb{P}_1(T_0 = +\infty) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{q^j}{p^j}}.$$

1. Pour $p > 1/2$, montrer que la chaîne est transciente.

2. Pour $p \leq 1/2$, montrer que la chaîne est récurrente. Quelle est l'équation définissant une mesure invariante π ?

3. Dans le cas $p < 1/2$, montrer que la chaîne est récurrente positive et calculer sa probabilité invariante.

4. Toujours dans le cas $p < 1/2$, calculer $E_2(S_2)$, où S_x est le temps de retour en x.

5. Pour $p = 1/2$, montrer que la chaîne est récurrente nulle.

Exercice 2 (Durée de vie d'ampoules)
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que

$$\mathbb{E}(Y_1) = \mu < +\infty, \qquad \text{pgcd}\{n \geq 1,\ \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1.$$

Les variables Y_n représentent les durées de vies d'ampoules, et la condition précédente est directement vérifiée dans le cas où $\mathbb{P}(Y_1 = 1) > 0$, par exemple si les Y_n sont de loi géométrique.
Lorsque l'ampoule k est grillée, on la remplace par l'ampoule $k+1$ de durée de vie Y_{k+1}. On définit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n,\ \exists k \geq 1,\ Y_1 + \dots Y_k = m\} - n.$$

1. Expliquer pourquoi X_n est le temps qu'il reste jusqu'à la prochaine panne au temps n.

2. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique.

3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\exists k \geq 1,\ Y_1 + \dots Y_k = n\big)$.

Exercice 3 (Trois livres sur une étagère)
Un étudiant a 3 livres sur son étagère, numérotés de 1 à 3. La probabilité qu'il choisisse le livre i est $\alpha_i \in]0,1[$ pour $i \in \{1,2,3\}$. Les choix qu'il fait chaque jour sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans déranger les autres. On note p_n la probabilité qu'au n-ième jour, les livres soient rangés dans l'ordre $(1,2,3)$.

1. Quel est le comportement asymptotique de p_n lorsque $n \to +\infty$?

2. Quel est le comportement asymptotique du nombre de fois où l'étudiant prend le livre le plus à gauche sur son étagère ?

Exercice 4 (Oiseau migrateur)
La position d'un petit oiseau migrateur est modélisée par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ transciente dans $\mathbb{Z}$, dont les seules transitions sont au plus proche voisin. On note P le noyau de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit par N_a le nombre total de passages en $a \in \mathbb{Z}$, par T_a le premier temps de passage en a et par σ_a le dernier temps de passage en a. Lorsque la position initiale est a, τ_a est le premier temps de retour en a et on note $\rho(a) = \mathbb{P}_a(\tau_a < +\infty)$.

1. Donner les définitions mathématiques des quantités précédentes.

2. Montrer que pour $k \geq 1$,
$$\mathbb{P}_a(N_a = k) = (1-\rho(a))\rho(a)^{k-1}.$$
3. Montrer que $\mathbb{P}_0(\sigma_a = n) = (1-\rho(a))\mathbb{P}_0(X_n = a)$ et établir l'égalité suivante :
$$\sigma_a = \mathbf{1}_{T_a<+\infty}\big(T_a + \sum_{i=1}^{N-1} \tau^{(i)}\big),$$
où N est une variable aléatoire géométrique de paramètre $\rho(a)$ indépendante de T_a et les $\tau^{(i)}$ sont i.i.d. de loi la loi de τ_a conditionnée par $\{\tau_a < +\infty\}$, et indépendants de T_a et N.
4. En déduire que :
$$\mathbb{E}_0(\sigma_a) = \mathbb{E}(T_a \mathbf{1}_{T_a<+\infty}) + \mathbb{P}_0(T_a < +\infty)\frac{\mathbb{E}_a(\tau_a \mathbf{1}_{\tau_a<+\infty})}{\mathbb{P}_a(\tau_a = +\infty)}.$$
5. On suppose que l'oiseau souhaite se déplacer vers $-\infty$, et on note M le point le plus à droite qu'il visite. Montrer que
$$\mathbb{P}_0(M \geq k+1) = \prod_{i=0}^{k} \mathbb{P}_i(M \geq i+1)$$
puis que
$$\mathbb{P}_k(M \geq k+1) = \frac{P(k,k+1)}{1 - P(k,k-1)\mathbb{P}_{k-1}(M \geq k)}.$$
6. Appliquer les résultats de la question 5 au cas de la marche aléatoire simple ($P(k,k+1) = p < q = P(k,k-1)$) issue de 0. Que vaut la probabilité de ne jamais revenir en 0 ?