PMA - fiche 6

Viet Chi Tran, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`

Dans toute la fiche, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Classes)
Déterminer les classes, ainsi que leurs natures, pour la chaîne de Markov dont la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tracer le graphe de la chaîne.

Même question avc la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)
On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ issue de $X_0 = 0$ et avec la transition P telle que $P(x, x+1) = p$ et $P(x, x-1) = q = 1-p$.

1. Supposons que $p \in]0,1[$. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ?

2. Quelle est la probabilité de se retrouver en 0 au temps n ? On pourra discuter en fonction de la parité de n.

3. En utilisant l'opérateur potentiel U associé à P, en déduire que la chaîne est récurrente ssi $p = 1/2$.

On se propose de retrouver ce résultat différemment.

4. On peut écrire $X_n = \sum_{k=1}^n Y_i$ où Y_i sont des variables aléatoires i.i.d. qui valent 1 avec probabilité p et -1 avec probabilité q. En utilisant la loi des grands nombres, dire comment se comporte X_n lorsque $n \to +\infty$ et $p \neq 1/2$. Retrouver ainsi si $p \neq 1/2$, la marche aléatoire est transciente.

5. Rappeler la définition de T_0, le temps d'entrée en 0. Calculer $\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty)$. Retrouver que la chaîne est récurrente pour $p = 1/2$.

6. Considérons le cas $p = 1/2$. Déterminer les mesures invariantes π pour la transition P. Existe-t-il des probabilités invariantes ? Qu'en déduire ?

Exercice 3 (Mesure invariante et récurrence)
Montrer que si une (μ, P)-chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace E fini est irréductible et qu'elle admet une probabilité invariante π, alors elle est récurrente.

Exercice 4 (Calcul de $\mathbb{E}_x(T_A)$)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E, issue de $X_0 = x$ et de transition P. Soit $A \subset E$ et soit T_A le temps d'entrée dans A. On pose $v(x) = \mathbb{E}_x(T_A)$. L'objectif est de montrer que $v(x)$ est la plus petite solution positive de

$$\begin{cases} v(x) = 0 & \text{si } x \in A \\ v(x) = 1 + Pv(x) & \text{si } x \notin A. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que v est solution de (1).

2. Soit $w(x)$ une autre solution positive de (1) et soit $Y_n = w(X_{n\wedge T_A}) + (n \wedge T_A)$. Montrer que $\mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = Y_n$. En déduire le résultat recherché.

Exercice 5 (Marche aléatoire inhomogène sur $E = \mathbb{N}$)
On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ issue de $X_0 = i \in \mathbb{N}$ et dont les transitions sont dépendantes de l'état où se trouve la chaîne :

$$P(i, i+1) = p_i, \quad P(i, i-1) = q_i, \quad P(i, i) = r_i$$

pour $i \in \mathbb{N}$, avec $q_0 = 0$, $p_0 > 0$ et $p_i,\ q_i \in]0, 1[$ pour $i > 0$. On note T_i le temps d'entrée en i et on pose :

$$\gamma_0 = 1, \qquad \gamma_i = \frac{q_1 \dots q_i}{p_1 \dots p_i}.$$

Soient $a < b$, a, $b \in \mathbb{N}$. On pose $T = T_a \wedge T_b$.

1. Etudier les fonctions u telles que $u(x) = Pu(x)$ pour tout $x \in \{a+1, \dots b-1\}$. S'agit-il de fonctions monotones ?

2. Soit i tel que $a \le i \le b$. Montrer que $\mathbb{P}_i(T < +\infty) = 1$.

3. Exprimer $v(i) = \mathbb{P}_i(X_T = b)$ en fonction des γ_i.

4. Exprimer $\{T_0 = +\infty\}$ en fonction des $\{T_n < T_0\}$ et calculer $\mathbb{P}_1(T_n < T_0)$. En déduire $\mathbb{P}_1(T_0 = +\infty)$ et une condition de récurrence de la chaîne en fonction des γ_i.

On suppose désormais que pour $i > 0$, $r_i = 0$, jusqu'à la fin de l'exercice.

5. La chaîne correspondant aux transitions

$$p_i = \frac{i+2}{2i+3}, \qquad q_i = \frac{i+1}{2i+3}$$

est-elle récurrente ?

6. Une mesure μ sur $\mathbb{N}$ est réversible si pour tout i et $j \in \mathbb{N}$,

$$\mu(i)P(i, j) = \mu(j)P(j, i).$$

Montrer que dans le cas de p_i et q_i généraux dans $]0, 1[$, toute mesure réversible μ est de la forme $\mu(i) = \alpha\zeta_i$ où

$$\zeta_0 = 1, \qquad \zeta_i = \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} \text{ pour } i \ge 1.$$

Sous quelles conditions sur les ζ_i existe-t-il une probabilité stationnaire ? Traiter l'exemple où $p_i = p$ et $q_i = q$ pour tout i.