PMA - fiche 5

Viet Chi Tran, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`

Dans toute la fiche, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Chaîne on-off)
On considère une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à deux états, $E = \{0, 1\}$. La condition initiale X_0 est distribuée suivant une mesure $\mu = (\mu(0), \mu(1))$. Les transitions sont déterminées par la probabilité $p_{01} = \alpha$ de passer à l'état 1 sachant qu'on est à l'état 0, et la probabilité $p_{10} = \beta$ de passer à l'état 0, étant à l'état 1.

1. Ecrire la matrice de transition et faire le graphe correspondant.
2. Déterminer en fonction de α, β et n la loi de X_n.
3. Que valent $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$?
4. Que se passe-t-il si $\alpha + \beta = 0$?

Exercice 2 (Chaînes définies à l'aide d'une innovation)
Soient E et F deux ensembles finis ou infini-dénombrables. Soit X_0 une v.a. sur E et une suite de v.a. i.i.d. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur F de loi μ et indépendante de X_0. On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence :

$$X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$$

où f est une fonction de $E \times F$ dans E.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P telle que :

$$P(x, y) = \sum_{u\in F} \mathbf{1}_{f(x,u)=y}\mu(u).$$

2. Application : si $E = \mathbb{Z}$, si $F = \{-1, 1\}$ avec $\mu(-1) = \mu(1) = 1/2$ et si $f(x, u) = x + u$, écrire X_n en fonction de X_0 et des U_i. Quelle est sa matrice de transition ?

Exercice 3 (Bzzzz)
Une abeille butine dans un champ de fleurs modélisé par $\mathbb{Z}$. Elle se déplace vers la gauche avec une probabilité q et vers la droite avec une probabilité $p = 1 - q$. On suppose que $p < q$. Soit X_n la position de l'insecte après avoir butiné n fleurs, avec $X_0 = 0$.

1. En utilisant une caractérisation classique des lois géométriques, montrer que le nombre de fleurs M que l'abeille va butiner sur la droite de sa position initiale suite une loi géométrique.
2. Etablir une relation entre $\mathbb{P}(M = 0)$ et $P(M \leq 1)$.
3. En déduire le paramètre de la loi géométrique de M.