PMA - fiche 4

Viet Chi Tran, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`

Dans toute la fiche, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Tribu engendrée par une partition dénombrable)
Soit X une variable aléatoire réelle de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$. Rappeler quelle est la tribu plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ contenant A, $\sigma(A)$. Ecrire $\mathbb{E}(X \mid A)$ et $\mathbb{E}(X \mid \sigma(A))$.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{F} = \sigma(A_n,\ n \in \mathbb{N})$. Montrer que $A \in \mathcal{F}$ est de la forme $\cup_{n \mid A\cap A_n \neq \emptyset} A_n$. En déduire que toute v.a. Y $\mathcal{F}$-mesurable s'écrit de la forme

$$Y = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}.$$

Exprimer $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$.

3. Soient X et Y deux variables i.i.d. de loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1,p)$. On considère $\mathcal{G} = \sigma(\{X + Y = 0\})$. Calculer $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ et $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$. Les variables obtenues sont-elles toujours indépendantes ?

Exercice 2 (Bases)
Soient X, Y des v.a. réelles intégrables, soit T une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Que peut-on dire des espérances conditionnelles suivantes ?

- $\mathbb{E}(f(T) \mid T)$ avec f $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable.
- $\mathbb{E}(X \mid T)$ avec X $\sigma(T)$-mesurable.
- $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$ avec X $\mathcal{B}$-mesurable.
- $\mathbb{E}(X \mid T)$ quand X et T sont indépendantes.
- $\mathbb{E}(XY \mid T)$ avec X $\sigma(T)$-mesurable.
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid T))$.

Exercice 3 (Poulette)
Une poule pond N oeufs, où $N \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Chaque oeuf éclot avec la probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment des autres. On notera $X_i = 1$ si l'oeuf i a éclot, $X_i = 0$ sinon. Soit K le nombre de poussins.

1. Calculer $\mathbb{P}(K = k \mid N = n)$ et en déduire $\mathbb{E}(K \mid N)$. En déduire $\mathbb{E}(K)$.

2. En utilisant la formule de Bayes, montrer que

$$\mathbb{P}(N = n \mid K = k) = \frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-(1-p)\lambda}.$$

Conclure en calculant $\mathbb{E}(N \mid K)$.

Exercice 4 (Conditionnement par rapport à une somme)
Soient $X_1, \dots$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1,p)$ avec $p \in]0,1[$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Que vaut $\mathbb{E}(X_2 \mid X_1)$? $\mathbb{E}(S_n \mid X_1)$?

1. Soit $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n,\ S_{n+1}, \dots) = \sigma(S_n, X_{n+1}, \mathcal{X}_{n+2}, \dots)$. Montrer que $\mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(X_1 \mid S_n)$.

2. Montrer que $\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \mathbb{E}(X_2 \mid S_n) = \cdots = \mathbb{E}(X_n \mid S_n)$. On pourra utiliser un argument direct ou montrer que pour toute fonction mesurable bornée f, $\mathbb{E}(X_1\ f(S_n)) = \cdots = \mathbb{E}(X_n\ f(S_n))$.

3. En déduire que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \mathbb{E}(X_i\ |\S_n) = \frac{S_n}{n}.$$

Exercice 5 (Conditionnement continu)
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité jointe $f(x, y)$. Rappeler l'expression de ψ telle que $\mathbb{E}(Y \mid X) = \psi(X)$.

1. Si $f(x, y) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{0 \leq y \leq x \leq 1}$, quelle est la loi de X ? Calculer la distribution conditionnelle de Y sachant X. Calculer $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1 \mid X)$ puis en déduire $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

2. Si $f(x, y) = x(y - x)e^{-y}$ pour $0 \leq x \leq y < +\infty$, calculer la densité de la loi de X sachant $Y = y$. En déduire $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

3. Si (X, Y) est un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^2$ centré et de matrice de variance-covariance

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

calculer $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

Exercice 6 (Vecteurs gaussiens)
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^2$ centré et de matrice de variance-covariance $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Soient $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $-1 < \rho < 1$. On pose

$$U = \sigma_1 X, \qquad V = \sigma_2 \rho X + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}\ Y.$$

1. Quelle est la loi de (U, V) ?

2. Que vaut $\mathbb{E}(UV)$?

3. Que valent $\mathbb{E}(U \mid V)$? $\mathbb{E}(V \mid U)$? $\mathrm{Var}(U \mid V)$ et $\mathrm{Var}(Y \mid U)$?