PMA - fiche 3

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Toutes les suites seront indexées par $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1 (Exemple avec une exponentielle)
Soit X une v.a. exponentielle de paramètre 1. On définit la suite de v.a. :

$$Y_n = X\mathbf{1}_{[0,n[}(X) + e^n \mathbf{1}_{[n,+\infty[}(X).$$

1. Montrer que (Y_n) converge en probabilité et presque sûrement vers X.

2. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.

3. Est-ce que Y_n converge vers X dans L^1 ?

Exercice 2 (Critère de convergence presque-sûre)
1. Soit (X_n) une suite de v.a. qui converge en presque-sûrement vers X. Montrer que cette convergence est équivalente à la convergence en probabilité vers 0 de

$$Y_n = \sup_{m>n} |X_m - X|.$$

2. Soit (X_n) une suite de v.a. et (ε_n) une suite de réels positifs tels que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n\big) < +\infty.$$

Montrer que (X_n) converge presque-sûrement vers une limite.

Exercice 3 (Convergence vers une constante)
Soit (X_n) une suite de v.a. et $c \in \mathbb{R}$ une constante. Montrer que la convergence de (X_n) vers c en loi implique une convergence de (X_n) vers c en probabilité.

Exercice 4 (Convergence en loi mais pas en probabilité)
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que (X_n) converge en loi et dans L^1 vers 0, mais pas presque-sûrement.

2. Par quoi faudrait-il remplacer $1/n$ pour avoir une convergence presque-sûre ?

Exercice 5 (Convergence en probabilité et domination)
Soit une suite (X_n) qui converge en probabilité vers X et soit une v.a. Y intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|X_n| \leq Y$. Montrer que la convergence de (X_n) a aussi lieu dans L^1.

Exercice 6 (Somme de v.a. de Poisson)
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_n)$. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = +\infty$ alors, en posant $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, on a la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} = 1.$$

Dans quel sens ?

Exercice 7 (Somme de v.a. de Poissons centrées réduites)
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(n)$. On considère

$$Z_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}.$$

1. Quelle est la fonction caractéristique de X_n ? et celle de Z_n ?

2. Montrer que Z_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 8 (Maximum de variables uniformes)
Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{U}[0,1]$.

1. Quelle est la loi de $M_n = \max_{1\leq j\leq n} X_j$?

2. Montrer que M_n converge vers 1 en loi, L^1 et presque-sûrement.

3. Montrer que $n(1-M_n)$ converge en loi et déterminer la limite.

4. Si maintenant les X_n sont de loi $\mathcal{N}(0,1)$, que dire de la limite presque-sûre de M_n ?