PMA - fiche 2

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Fonctions caractéristiques pour des vecteurs gaussiens)
1. Expliciter la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et en déduire $E(X^k)$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit Y un vecteur gaussien de dimension n, de matrice de variance-covariance V et d'espérance m. A quels espaces appartiennent V et m ? Quelle est la fonction caractéristique de Y ?

Exercice 2 (Transformations de vecteurs gaussiens)
1. Soit Y un vecteur gaussien de dimension n, centré et de matrice de variance $\sigma^2\mathrm{Id}$. Soit A une matrice orthogonale. Quelle est la loi de AY ?

2. Soit $Y = (Y_1, \dots Y_n)'$ un vecteur gaussien centré de dimension n et de matrice de variance est diagonale par blocs :

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & & & \\ & V_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_k \end{pmatrix}$$

où V_i est carrée de dimension ℓ_i avec $\ell_1 + \dots \ell_k = n$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que les vecteurs $Z_1 = (Y_1, \dots Y_{\ell_1})'$, …, $Z_k = (Y_{\ell_1+\dots+\ell_{k-1}+1}, \dots Y_{\ell_k})'$ sont indépendants.

Exercice 3 (Indépendance)
Soit X un vecteur aléatoire de dimension d de carré intégrable et de matrice de variance K. Soient T_1 et T_2 deux applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$ respectivement.

1. Quelle est la matrice de variance du vecteur

$$\begin{pmatrix} T_1 X \\ T_2 X \end{pmatrix} ?$$

2. Si X est gaussien, montrer que T_1X et T_2X sont indépendants ssi $T_1 K T_2' = 0$.

Exercice 4 (Corrélation)
Soit $(X,Y)'$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$ centré et de variance

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

où $\rho \in [0,1]$. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont deux v.a. gaussiennes indépendantes.

Exercice 5 (Vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$)
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ d'espérance $m = (1,1,0)'$ et de variance

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le noyau de V ? En déduire que presque-sûrement $X_2 - X_3 = 1$.
2. Le vecteur $(X_1, X_2)'$ admet-il une densité dans $\mathbb{R}^2$? Si oui, laquelle ?
3. Quel est le support dans $\mathbb{R}^3$ de la loi de X ?

Exercice 6 (Méthode de Box-Muller)
Soient U et V deux variables $\mathcal{U}[0,1]$ indépendantes. On pose :

$$X = \sqrt{-2\log U}\ \cos(2\pi V), \qquad Y = \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V)$$

1. Quelle sont les lois de $X^2 + Y^2$ et de Y/X ?
2. Montrer que (X,Y) est un vecteur gaussien dont on précisera l'espérance et la matrice de variance-covariance.