PMA - M1 IM - Fiche 1

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Lois de Bernoulli et binomiales)
Une variable X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $p \in [0,1]$ si $\mathbb{P}(X)1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Ces variables permettent de modéliser l'occurrence ou non d'un phénomène.

1. Dessiner la fonction de répartition de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Soient $X_1, \dots X_n$ des variables de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ indépendantes, et soit $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

3. Quelles sont les valeurs que peut prendre S ? Pour k l'une de ces valeurs, que vaut $\mathbb{P}(S = k)$? Par définition, S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
4. Calculer l'espérance et la variance de S.
5. Dessiner la fonction de répartition de S.

Exercice 2 (Vrai-Faux)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement ou donner un contre-exemple.
1. Soit X un ensemble, alors l'ensemble des parties de X est une tribu.

2. Si $A \subset B$ avec B mesurable, alors A est mesurable.

3. Si f et g sont des fonctions réelles mesurables de $(E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors $\sup(f,g)$ est mesurable.

4. Si f est mesurable, $|f|$ est mesurable.

5. $\mathbf{1}_A$ est mesurable ssi A est mesurable.

6. Si μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et si f est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, alors $\int f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$.

7. Si f est une fonction mesurable positive telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = +\infty$ alors $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = +\infty$.

8. Pour toute fonction mesurable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et pour toute mesure μ sur $\mathbb{R}$, la fonction $F(u) = \int_{-\infty}^u f(x)d\mu(x)$ est continue.

Exercice 3 (Calcul d'intégrales)
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(x)\mu(dx) \qquad \text{où} \qquad \mu(dx) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{\pi n}(dx)$$
$$\int_{\mathbb{R}} x^3\mu(dx) \qquad \text{où} \qquad \mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx$$
$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[1,2]}(x)e^x \sin(\pi x/2)\mu(dx) \qquad \text{où} \qquad \mu(dx) = \delta_2(dx) + e^{-x}dx.$$

Exercice 4 (Quelques lois usuelles)
Pour chacune des lois suivantes, rappeler leur définition, en précisant s'il s'agit de lois absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue ou discrètes. Calculer ensuite leur espérance et leur variance.

1. Loi uniforme sur $[a,b]$, $\mathcal{U}[a,b]$
2. Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
3. Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 5 (Lois exponentielles et lois associées)
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ si elle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Calculer la fonction de répartition et la fonction de survie de X.
3. Caculer $\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t)$, pour t et $s > 0$. Commentaire ?

4. On considère maintenant $X_1, \dots X_n$ des variables exponentielles indépendantes, toutes de paramètre λ. Calculer par récurrence la densité de $S = X_1 + \dots X_n$. La loi de S est par définition une loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$.

5. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables exponentielles indépendantes de paramètre λ. On considère les sommes partielles $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Soit N la variable aléatoire telle que $S_N \leq 1$ et $S_{N+1} > 1$. Montrer que N suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 6 (Calcul)
Supposons que X admet la densité $f(x) = Cx^2\mathbf{1}_{[-1,2]}(x)$, par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Calculer la constante C.
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(|X| \geq 1/2)$.
3. Calculer la densité de la variable aléatoire $Y = |X|$.