Mesure et Intégration - fiche 9

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Intégrale d'une fonction positive de deux variables)
Soit
$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad f(0,0) = 0.$$

1. Justifier la mesurabilité de f.

2. Calculer $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$, $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\ dx\ dy$.

Exercice 2 (Mesure produit de la diagonale)
Soit $\Delta = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que Δ est un ensemble mesurable.

2. Montrer que si μ est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$, alors $D = \{x,\ \mu\{x\} \neq 0\}$ est dénombrable.

3. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$(\mu \otimes \nu)(\Delta) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu\{x\}\nu\{x\}.$$

Exercice 3 ()
On considère $(]0,+\infty[\times]a,b[, \mathcal{B}(]0,+\infty[\times]a,b[), \lambda^{\otimes 2})$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et où $0 < a < b$.

1. Montrer que l'application f définie pour $(x,y) \in]0,+\infty[\times]a,b[$ par $f(x,y) = \exp(-xy)$ est dans $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda^{\otimes 2})$.

2. Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\ dx.$$

Exercice 4 ()
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < +\infty$. Soit f une fonction mesurable positive de Ω dans $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $A = \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+,\ f(\omega) \geq t\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

2. On considère $\Omega \times \mathbb{R}_+$ la mesure $m = \mu \otimes \lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En calculant $\int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_A\ dm$, montrer que
$$\int_\Omega f\ d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(f \geq t)\ dt.$$

3. On considère l'application H de $\omega \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie, pour tout $(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ par $H(\omega,t) = nt^{n-1}\mathbf{1}_{[t,+\infty[}(f(\omega))$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que c'est une fonction $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_\Omega f^n \, d\mu = \int_0^{+\infty} n t^{n-1} \mu(f \geq t) \, dt.$$

5. f et g deux fonctions mesurables positives, et soit $F(\omega, s, t) = \int_{[t,+\infty[}(f(\omega))\mathbf{1}_{[s,+\infty[}(g(\omega))$. Montrer que

$$\int_\Omega fg \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+^2} \mu\big(\{f \geq t\} \cap \{g \geq s\}\big) \, d\lambda^{\otimes 2}(s,t).$$

Exercice 5 (Calcul d'intégrales doubles)
Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$, $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, $\int_{[0,1]^2} |f(x,y)| \, dx \, dy$.

1. $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$.

2. $f(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-3} \mathbf{1}_{0<y<|x-\frac{1}{2}|}$.

3. $f(x,y) = (x-y)/(x^2+y^2)^{3/2}$.

Exercice 6 (Calcul de la somme de $1/n^2$)
1. Montrer que

$$\int_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{1 - xy} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

2. En faisant le changement de variables $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$, montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 7 (Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $b_n = \lambda_n(B_n)$ le volume de la boule unité $B_n = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^n$ mesuré avec la mesure de Lebesgue λ_n dans $\mathbb{R}^n$.

1. Calculer b_2 et b_3.

2. Etablir une relation de récurrence entre b_n et b_{n-2} pour tout $n \geq 3$.

3. En déduire l'expression de b_n pour $n \geq 2$.