Mesure et Intégration - fiche 8

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Convergence L^p et μ-p.p.)
Considérons l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$. On pose pour $n \geq 0$ et $k \in \{0, \dots 2^n - 1\}$, $f_{n,k} = \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[}$. Pour $x \in [0,1[$ fixé, soit $k_n(x)$ l'entier tel que $k_n(x)/2^n \leq x < (k_n(x)+1)/2^n$.

1. Calculer $\|f_{n,k}\|_p$.

2. En posant $g_k = f_{n,k-2^n}$ si $k \in \{2^n, \dots 2^{n+1} - 1\}$, montrer que $(g_k)_{k\geq 1}$ converge vers 0 en norme L^p, mais pas λ-p.p.

Exercice 2 (Espaces L^∞)
On considère des fonctions de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ la norme infinie de f et $\|f\|_{s.e} = \inf\{M \geq 0, \mu\{|f| > M\} = 0\}$ son suprémum essentiel. On note $\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f \ , \ \|f\|_{s.e} < +\infty\}$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ si et seulement si il existe une fonction $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée telle que $f = g$ μ-p.p. et $\|g\|_\infty = \|g\|_{s.e} = \|f\|_{s.e}$.

2. Montrer que la relation $\simeq$ définie par $f \simeq g \ \Leftrightarrow \|f - g\|_{s.e} = 0$ est une relation d'équivalence. On définit par $L^\infty(\mu)$ l'espace $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ quotienté par $\simeq$.

3. Montrer que $(L^\infty(\mu), \|.\|_{s.e})$ est un $\mathbb{R}$-e.v.n. complet.

4. (Inégalité de Hölder) Montrer que si $f \in L^1(\mu)$ et $g \in L^\infty(\mu)$, alors $fg \in L^1(\mu)$ et

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_1 \|g\|_{s.e} < +\infty.$$

5. Pour toute fonction mesurable f, montrer que $\|f\|_{s.e} \leq \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p$. Considérer la fonction constante égale à 1 sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue, et montrer qu'on a inégalité stricte.

6. Montrer que pour tout $f \in \cup_{p>0} L^p(\mu)$, on a $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_{s.e}$.

Exercice 3 (Séparabilité)
On rappelle qu'un espace X est séparable s'il admet une partie dénombrable dense. Le but de cet exercice est de montrer que $L^p_{\mathbb{R}}(\lambda)$ est séparable lorsque $p \in [1, +\infty[$ et non séparable lorsque $p = +\infty$, λ étant la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que pour $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\lambda)$.

2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ inclus dans un compact. Montrer que

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(O), \ A \subset O, \ O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on pourra considérer $O_n = \{x \in \mathbb{R}, \ d(x, A) < 1/n\}$.

3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) < +\infty$. Montrer qu'il existe une suite d'ouverts $\widetilde{O}_n$ tels que $\mathbf{1}_{\widetilde{O}_n}$ converge vers $\mathbf{1}_A$ dans L^p.

4. En déduire que l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\lambda)$ pour $p \in [1, +\infty[$. En déduire que pour $p \in [1, +\infty[$, $L^p_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ est séparable.

5. Soit $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ compact tel que $\lambda(C) > 0$. Montrer par l'absurde que

$$\forall \alpha \neq \alpha',\ B_{\|.\|_\infty}\big(\mathbf{1}_{\alpha+C}, \frac{1}{4}\big) \cap B\big(\mathbf{1}_{\alpha'+C}, \frac{1}{4}\big) = \emptyset.$$

6. En déduire que $L^\infty_{\mathbb{R}}(\lambda)$ n'est pas séparable.

Exercice 4 (Représentation d'une forme linéaire continue sur $L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$)
Soit Φ une forme linéaire continue de $L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$ dans $\mathbb{R}$. On pose $F = \Phi^{-1}(0)$.

1. Montrer que F est un s.e.v. fermé de $L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$.

2. En considérant $h \in F^\perp \setminus \{0\}$ (si cet espace n'est pas vide), et en calculant $\Phi(f + \lambda h)$, en déduire qu'il existe une fonction $g = \lambda_0 h$ telle que pour tout $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$, $\Phi(f) = \int fg\, d\mu$.

Exercice 5 (Théorème de Radon-Nikodym)
Soient μ et ν deux mesures sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{A})$ telles qu'il existe une fonction f positive et mesurable satisfaisant : $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$. On dit que ν admet une densité de Radon-Nikodym, f, par rapport à μ, notée $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

1. Montrer que si $\mu(A) = 0$ alors $\nu(A) = 0$ (absolue continuité de ν par rapport à μ, notée $\nu << \mu$).

2. En prenant μ la mesure telle que $\mu(A) = \mathrm{Card}(A)$ et $\nu = \lambda$ la mesure de Lebesgue, montrer que l'absolue continuité n'entraîne pas l'existence d'une densité de ν par rapport à μ.

Le but de la suite est de montrer (*) μ et ν sont des mesures σ-finies $\Leftrightarrow$ l'absolue continuité entraîne l'existence d'une densité.

3. Commençons par considérer le cas où μ et ν sont deux mesures finies telles que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) \leq \mu(A)$. En considérant $\Phi\ :\ f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mu) \mapsto \int_X f\, d\nu \in \mathbb{R}$, montrer $(*)$.

4. Généraliser le résultat précédent au cas où μ et ν sont deux mesures finies, mais sans l'hypothèse que ν soit dominée par μ. Montrer que la densité $d\nu/d\mu$ est unique dans $L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ (i.e. à une égalité μ-p.p. près).

5. Généraliser aux mesures σ-finies.