Mesure et Intégration - fiche 6

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Limites d'intégrales)
Déterminer lorsqu'elle existe, la limite des expressions suivantes :

$$(1) \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln(x)\big(1-\frac{x}{n}\big)^n dx, \qquad \text{en déduire } \lim_{n\to+\infty} \ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$(2) \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$$

$$(3) \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2(x)} f(x)dx, \quad \text{où} \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$$

$$(4) \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \big(1-\frac{x}{n}\big)^n e^{x/2} dx.$$

Exercice 2 (Comportement d'une intégrale paramétrique)
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. Déterminer suivant les valeurs de $\alpha > 0$ la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X n \log\big(1 + (\frac{f(x)}{n})^\alpha\big)\mu(dx).$$

Exercice 3 (Inégalité de Jensen)
1. Soit μ une mesure de probabilité sur I, intervalle de $\mathbb{R}$. Soit θ une fonction convexe sur I. Montrer que pour toute fonction f intégrable telle que $f(x) \in I$, on a $\int f d\mu \in I$ et

$$\theta\big(\int f d\mu\big) \le \int (\theta \circ f) d\mu.$$

2. Dans quel cas y a-t-il égalité pour tout f ?

3. Soit θ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction mesurable bornée f de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on ait :

$$\theta\big(\int_0^1 f d\lambda\big) \le \int_0^1 (\theta \circ f) d\lambda,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que θ est convexe.

Exercice 4 (Séries et intégrales)
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f\|_1 < +\infty$.

1. Montrer que $\sum_n f_n$ converge presque partout et dans $\mathcal{L}^1$ et que

$$\int \big(\sum_n f_n\big) d\mu = \sum_n \big(\int f_n d\mu\big).$$

2. Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|ax|} dx < +\infty$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{zu} du = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} u^n f(u) du.$$