Mesure et Intégration - fiche 6

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Intégrales dépendant d'un paramètre)
Soit (E, d) un espace métrique et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une application de $E \times X$ dans $\mathbb{K}$, et soit $u_\infty \in E$.

1. Supposons que (i) pour tout $u \in E$, $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable, (ii) $\mu(dx)$-p.p., $u \mapsto f(u, x)$ est continue en u_∞, (iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall u \in E$, $\mu(dx)$-p.p., $|f(u, x)| \leq g(x)$. Alors, montrer que

$$F(u) = \int_X f(u, x)\mu(dx)$$

est définie en tout $u \in E$ et est continue en u_∞.

2. Supposons que $E = I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et que $u_\infty \in I$. Supposons (i) pour tout $u \in I$, $x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, (ii) $\mu(dx)$-p.p., $\partial_u f(u_\infty, x)$ existe, (iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que pour tout $u \in I$, $\mu(dx)$-p.p., $|f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|$. Alors, montrer que $F(u)$ est dérivable en u_∞ de dérivée

$$F'(u_\infty) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\mu(dx).$$

3. Remplaçons (ii) et (iii) de la question **2.** par : (ii') $\mu(dx)$-p.p. $u \mapsto f(u, x)$ est dérivable sur I, (iii') il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que $\mu(dx)$-p.p., pour tout $u \in I$, $|\partial_u f(u, x)| \leq g(x)$. Montrer alors que $F(u)$ est dérivable sur tout I, avec la dérivée donnée en dérivant sous le signe somme.

4. *Application 1 : primitive* En utilisant la question précédente, montrer que pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ (où λ est la mesure de Lebesgue) et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, la fonction $F(u) = \int_a^u f(x)\ \lambda(dx)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5. *Application 2 : transformée de Fourier* Pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, sa transformée de Fourier en $u \in \mathbb{R}$ est donnée par :

$$\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x)\lambda(dx).$$

5.1. Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\widehat{f}'(u)$.
5.2. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$.
5.3. On veut maintenant calculer la transformée de Fourier de $f(x) = 1/(x^2 + 1)$. Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par

$$g_n(t) = \int_{-n}^{n} \frac{e^{-itx}}{x^2 + 1} dx.$$

Montrer que g'_n converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. En déduire que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ de dérivée

$$\widehat{f}'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-iue^{-iu}}{u^2 + t^2} du.$$

Montrer ensuite que $\widehat{f}$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^*_+$ avec $\widehat{f}'' = \widehat{f}$. Calculer $\widehat{f}(0)$ et $\lim_{t\to+\infty} \widehat{f}(t)$. En déduire que $\widehat{f}(t) = \pi e^{-|t|}$.
6. *Application 3 : convolution* Pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la convolée de f et φ,

$$(f \star \varphi)(u) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u - x) f(x)\lambda(dx),$$

est bien définie, continue et bornée.
Si de plus, $\varphi \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (de classe $\mathcal{C}^1$, bornée à dérivée bornée), montrer alors que $f \star \varphi$ est dérivable et que $\forall u \in \mathbb{R}$, $(f \star \varphi)'(u) = (f \star \varphi')(u)$.
7. *Application 4 : séries de fonctions* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues sur E telle que $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty < +\infty$. Montrer que $u \mapsto \sum_{n\geq 1} f_n(u)$ est continue sur E.
Si de plus, les fonctions f_n sont dérivables sur I avec $\|f'_n\|_\infty < +\infty$, alors $u \mapsto \sum_{n\geq 1} f_n(u)$ est dérivable de dérivée $u \mapsto \sum_{n\geq 1} f'_n(u)$.

Exercice 2 (Fonction Gamma)
La fonction γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx, \qquad t > 0.$$

1. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$
3. Montrer que pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t+1) = \sqrt{t}\ t\ e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \big(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\big)^t e^{-\sqrt{t}y}\ dy.$$

4. Montrer que pour tout $y \geq 0$, la fonction $t \mapsto t\ln(1+y/\sqrt{t}) - y\sqrt{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $y \in]-\sqrt{t}, 0[$, $t\ln(1+y/\sqrt{t}) - y\sqrt{t} \leq y^2/2$.
5. Déduire des questions précédentes et de l'égalité

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}dy = \sqrt{2\pi},$$

la formule de Stirling :

$$\Gamma(t+1) \sim_{t\to+\infty} \sqrt{2\pi t}t^t e^{-t},$$

qui donne pour $t = n$ entier, $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.