Mesure et Intégration - fiche 5

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Quizz et questions faciles)
1. Si μ est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, et f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$, alors $\int_{\mathbb{N}} f\ d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$. Vrai ou faux ?
2. Si f est une fonction mesurable positive telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = +\infty$ alors $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = +\infty$. Vrai ou faux ?
3. Pour toute fonction mesurable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et pour toute mesure μ sur $\mathbb{R}$, la fonction $F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)d\mu(x)$ est continue. Vrai ou faux ?
4. Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $\mathbb{P}^X$ la loi image de $\mathbb{P}$ par X (rappeler sa définition). Ecrire $\mathbb{P}^X$ si X est une variable de Bernouilli de paramètre p, une variable de Poisson de paramètre λ, une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
5. Si μ et ν sont deux mesures et que $m = \mu + \nu$ est la mesure définie par $\forall A \in \mathcal{A},\ m(A) = \mu(A) + \nu(A)$, alors pour toute fonction mesurable positive f de $(A, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $\int f\ dm = \int f\ d\mu + \int f\ d\nu$.
6. Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, alors $\nu(dx) = f(x)\mu(dx)$ est une mesure finie et pour toute fonction g mesurable positive, $\int g d\nu = \int fg\ d\mu$.

Exercice 2 (Calcul d'intégrales)
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(x)\mu(dx) \qquad \text{où} \qquad \mu(dx) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{\pi n}(dx)$$
$$\int_{\mathbb{R}} x^3\mu(dx) \qquad \text{où} \qquad \mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx$$
$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[1,2]}(x)e^x \sin(\pi x/2)\mu(dx) \qquad \text{où} \qquad \mu(dx) = \delta_2(dx) + e^{-x}dx.$$

Exercice 3 (Lien avec les probabilités)
Soit X la variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui représente le temps passé par un patient dans un hôpital. Le temps de guérison Y est supposé être une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ, mais un patient ne peut pas rester dans cet hôpital plus de $c = 14$ jours.

1. Ecrire X en fonction de Y et de c.

2. En déduire $\mathbb{E}(f(X))$ pour une fonction f mesurable positive. Quelle est la loi $\mathbb{P}^X$ de X ?

3. Quelle est la fonction de répartition de X ?

4. Quel est le temps moyen passé à l'hôpital ? Quelle est la variance du temps passé à l'hôpital ?

Exercice 4 (Queue de distribution et intégrabilité)
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit f une fonction mesurable de X dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ssi $\sum_{n\geq 0} n\mu\big(\{n \leq |f| < n+1\}\big) < +\infty$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\mu\big(\{k \leq |f| < k+1\}\big) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu\big(\{|f| \geq k\}\big) - (n+1)\mu\big(\{|f| \geq n+1\}\big).$$

3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante convergeant vers 0 et telle que la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - (n+1)u_{n+1}$ soit bornée. Montrer que pour tout $m \geq n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^{n+1} u_k - (n+1)u_{m+1} \leq v_m$. En déduire que $\sum_{n\geq 1} u_n < +\infty$.

4. En déduire que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ssi $\sum_{n\geq 1} \mu\big(\{|f| \geq n\}\big) < +\infty$.

Exercice 5 (Lemme de Fatou)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables positives de $(X,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Alors,

$$0 \le \int_X \liminf_{n\in\mathbb{N}^*} f_n \; d\mu \le \liminf_{n\in\mathbb{N}^*} \int_X f_n \; d\mu \le +\infty.$$

Exercice 6 (Exprimer une intégrale par une série)
1. Soit $(f_n)_{n\ge 0}$ une suite de fonctions mesurables positives de $(X,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Montrer que

$$\int_X \sum_{n\ge 0} f_n \; d\mu = \sum_{n\ge 0} \int_X f_n \; d\mu.$$

En application, montrer que pour toute famille de réels positifs $(a_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$,

$$\sum_{p\ge 0}\sum_{q\ge 0} a_{p,q} = \sum_{q\ge 0}\sum_{p\ge 0} a_{p,q}$$

2. Montrer que, pour tout a et b dans $\mathbb{R}_+^*$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

3. Montrer que pour p et q deux entiers ≥ 1,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}.$$

En déduire une expression de $\ln(2)$ et de $\pi/4$.

Exercice 7 (Intégrabilité et sommabilité)
Soit f une fonction mesurable positive de $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$.

1. Montrer que

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) \Big) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

2. En déduire que si f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$ est convergente pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.