Mesure et Intégration - fiche 4

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Quizz et questions faciles)
Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de sa tribu Borélienne.
1. si f et g sont mesurables, $\max(f, g)$ est mesurable. Vrai ou faux ?
2. si f est mesurable, $|f|$ est mesurable. Vrai ou faux ?
3. si $|f|$ est mesurable, f est mesurable. Vrai ou faux ?
4. l'image par une fonction bijective d'une tribu est une tribu. Vrai ou faux ?
5. Quelles sont les fonctions mesurables h de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lorsque $\mathcal{F}$ est la tribu grossière ? triviale ?

Exercice 2 (Partitions et fonctions mesurables)
Soit $(A_n)_{n\in I}$ une partition de E où $I \subset \mathbb{N}$.

1. Caractériser les éléments de la tribu $\sigma(A_n, n \in I)$ lorsque $I = \{0\}$, $I = \{0, 1\}$, $I = \{0, 1, 2\}$, $I = \mathbb{N}$.

2. Soit f une fonction mesurable de $(E, \sigma(A_n, n \in I))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que f est constante sur chaque A_n. En déduire la forme générale des applications mesurables pour I comme en **1.**.

Exercice 3 (Parité, imparité)
On considère dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la famille $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ A = -A\}$, où pour un ensemble A de $\mathbb{R}$, $-A = \{-x \in \mathbb{R},\ x \in A\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Les applications suivantes sont-elles $\mathcal{A} - \mathcal{A}$-mesurables : $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \cos(x)$?

3. Sont-elles $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables ? Quelles sont les applications $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables ?

4. Soit S une partie de $\mathbb{R}$ telle que $0 \in S$, $S = -S$ et $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{C} = \{A \cup B,\ A \in \mathcal{A},\ B \subset S,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{A}$.

5. Si T est une application bijective mesurable de $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$ dans lui-même, montrer que la famille $\mathcal{A}_T$ des ensembles mesurables invariants par T est une tribu.

6. Dans le cas $p = 1$, et $T : x \mapsto x + 1$, montrer que $\mathcal{A}_T$ est la tribu engendrée par les parties de la forme

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [a + n, b + n)$$

où $0 \leq a < b \leq 1$.

Exercice 4 (Limsup et liminf de suites de fonctions)
Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, qu'on munira de sa tribu Borélienne. On définit :

$$\bar{f} := \limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k \text{ et } \underline{f} := \liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k.$$

1. Montrer que $\bar{f}$ et $\underline{f}$ sont $\mathcal{E} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables.

2. Montrer que $\bar{f} \geq \underline{f}$.

3. Montrer que $\bar{f} = \underline{f}$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\bar{R}$ et que dans ce cas, la limite $\bar{f} = \underline{f} = \lim_{n\to+\infty} f_n$.

4. En déduire que la fonction f définie par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ si la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $f(x) = 0$ sinon est une application $\mathcal{E} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}$. Montrer que

$$\mathbf{1}_{\limsup_{n\to+\infty} A_n} = \limsup_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n}, \text{ et } \mathbf{1}_{\liminf_{n\to+\infty} A_n} = \liminf_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n}.$$

Exercice 5 (Monotonie, dérivabilité et mesurabilité)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si f est monotone, alors f est borélienne.

2. Si f est dérivable, alors f' est borélienne.

3. Montrer que

$$\{x \in \mathbb{R}, \quad f \text{ est continue en } x\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \operatorname{int}\big(f^{-1}]r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}[\big),$$

où $\operatorname{int}(A)$ désigne l'intérieur de A. En déduire que $\{x \in \mathbb{R}, \quad f \text{ est continue en } x\}$ est un borélien.