Mesure et Intégration - fiche 3

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Exemple montrant la nécessité de (iii) dans le Th. de Carathéodory)
Considérons, sur $\mathbb{N}$, la famille

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathrm{Card}(A) < +\infty \text{ ou } \mathrm{Card}({}^cA) < +\infty\}$$

et l'application

$$\begin{array}{rccl} \mu & : & \mathcal{C} & \to \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & & A & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{Card}(A) < +\infty \\ 1 & \text{si } \mathrm{Card}({}^cA) < +\infty. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une algèbre de Boole. Que vaut $\sigma(\mathcal{C})$?

2. Montrer que μ ne satisfait pas toutes les hypothèses du théorème de Carathéodory.

3. Montrer que μ ne peut pas se prolonger en une mesure $\widetilde{\mu}$ sur $\sigma(\mathcal{C})$?

Exercice 2 (Mesures de Stieltjes sur $\mathbb{R}$)
Soit F une fonction croissante et continue à droite de $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui à un intervalle $I =]a, b]$ associe $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$.

2. Réciproquement, montrer que pour toute mesure μ, il existe une unique fonction F croissante, continue à droite et nulle en 0 telle que $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$.

Exercice 3 (Mesure de Hausdorff)
Soit (X, d) un espace métrique et α, $\varepsilon > 0$. Pour toute partie A de X, on désigne par $\mathcal{R}_\varepsilon(A)$ l'ensemble des recouvrements dénombrables $(B_k)_{k\geq 1}$ de A par des boules B_k de diamètres $\leq \varepsilon$. On pose :

$$\mu_\alpha^\varepsilon := \inf_{\mathcal{R}_\varepsilon(A)} \Big(\sum_{k\geq 1} \big(\mathrm{diam}\ B_k\big)^\alpha \Big).$$

1. Montrer que la fonction $\varepsilon \mapsto \mu_\alpha^\varepsilon(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que μ_α^ε est une mesure extérieure.

3. En déduire que l'application $\mu_\alpha := \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\alpha^\varepsilon$ est une mesure extérieure appelée *mesure de Hausdorff*.

4. Montrer que pour toute partie A de X, $\alpha \mapsto \mu_\alpha(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que la fonction $\alpha \mapsto \varepsilon^{-\alpha}\mu_\alpha^\varepsilon(A)$.

Exercice 4 (Mesure invariante par homothétie)
Soit μ la mesure définie sur $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*),\ \mu(A) = \int_A \frac{dx}{x}.$$

1. Montrer que μ est invariante par toute homothétie de rapport > 0.

2. Soit μ' une mesure sur $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ invariante par homothétie et telle que $\mu'([1, e]) = 1$. Montrer que $\mu' = \mu$.

3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$, et pour tout $\alpha > 0$, $A^\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\mu(A^\alpha) = \alpha\mu(A)$.