Mesure et Intégration - fiche 2

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Quizz)
Les affirmations suivantes ont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement ou donner un contre-exemple.

1. Soit X un ensemble, alors l'ensemble des parties de X est une tribu.

2. Si A est un ensemble inclus dans un ensemble B mesurable, alors A est mesurable.

Exercice 2 (Ensembles engendrant les Boréliens)
Soit $\mathcal{B}(]0,1[)$ la tribu Borélienne sur $]0,1[$.

1. Montrer que tout ouvert de $]0,1[$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles de $]0,1[$ de la forme $]r-\delta, r+\delta[$ où r et δ sont des rationnels de $]0,1[$.

2. Montrer que $\mathcal{B}(]0,1[)$ est engendrée par chacune des familles suivantes :

2.1. $\mathcal{C}_1 = \{[a,b],\ a\leq b,\ a,b\in]0,1[\}$.

2.2. $\mathcal{C}_2 = \{[a,b],\ a\leq b,\ a,b\in]0,1[\cap\mathbb{Q}\}$.

2.3. $\mathcal{C}_3 = \{]0,t],\ t\in]0,1[\}$.

2.4. $\mathcal{C}_4 = \big\{]0,\frac{1}{2^n}[,\ [\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[,\ n\in\mathbb{N},\ k\in\{1,\dots 2^n-1\}\big\}$.

3. Considérons pour tout $n\in\mathbb{N}$ la famille suivante d'ensembles de $]0,1[$:

$$\mathcal{B}_n = \sigma\Big(]0,\frac{1}{2^n}[,\ [\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[,\ k\in\{1,\dots 2^n-1\}\Big).$$

Montrer que la suite des $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion mais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 3 (Existence d'ensembles non Boréliens : ensembles de Vitali)
1. On considère $x\mathcal{R}y$ si $x-y\in\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathcal{R}$ définit une relation d'équivalence.

2. En déduire qu'il existe $E\subset[0,1]$ tel que pour tout réel x, on puisse trouver un réel unique $y\in E$ avec $x-y\in\mathbb{Q}$.

3. On pose

$$G = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(E+r).$$

Montrer que $[0,1]\subset G\subset[-1,2]$ et montrer que si $r,s\in\mathbb{Q}$, alors $r\neq s \Leftrightarrow (E+r)\cap(E+s)=\emptyset$.

4. Utiliser la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ pour en déduire que $E\notin\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on admettra la propriété d'invariance par translation de λ).

Exercice 4 (Tribu produit)
Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On note, pour toutes familles $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}\subset\mathcal{B}$, $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D} := \sigma\big(\{A\times B,\ A\in\mathcal{C},\ B\in\mathcal{D}\}\big)$.

Si $\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{C})$ et si $\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{D})$, et si $X\times Y\in\mathcal{C}\times\mathcal{D}$, alors montrer que $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}=\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Cette tribu est appelée tribu produit.

Exercice 5 (Montrer qu'une application est une mesure)
Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application donnée est une mesure et décrire les ensembles de mesure nulle.

1. pour $a \in X$ fixé, δ_a est l'application définie par $\forall A \in \mathcal{A}$, $\delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a)$.

2. $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ A \text{ ou } {}^cA \text{ est dénombrable}\}$ et $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable, $\mu(A) = 1$ sinon.

3. $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, et μ est définie pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\mu(A) = \sum_{n\in A} u_n$.

Exercice 6 (Loi d'une variable aléatoire)
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $(F, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Soit $X : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ une fonction telle que pour tout $B \in \mathcal{F}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ (on dit que X est une fonction mesurable). Montrer que l'application $\mu_X : B \in \mathcal{F} \mapsto \mu_X(B) = \mu(X^{-1}(B))$ définit une mesure positive sur $(F, \mathcal{F})$.

Exercice 7 (Non continuité à droite)
On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage $n(di)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \{n,\ n+1,\ \ldots\}$. Montrer que $\lim \downarrow A_n = \emptyset$, mais qu'on n'a pas convergence de $n(A_n)$ vers $n(\emptyset)$.

Exercice 8 (Limite inf, limite sup et Lemme de Borel Cantelli)
Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω et soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de Ω.

1. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors il en est de même pour $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$.

2. Soit μ une mesure telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu\big(\limsup A_n\big) = 0$.

Exercice 9 (Mesure et fonction de survie)
Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère une mesure positive finie μ et on définit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par $F(x) = \mu([x, +\infty[)$.

1. Montrer que μ est uniquement déterminée par la donnée de F.

2. Montrer que F est décroissante, continue à gauche sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites en $\pm\infty$.

3. Calculer $\mu\{x\}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu\{x\} = 0$. Que peut-on en déduire sur $D = \{x \in \mathbb{R},\ \mu\{x\} \neq 0\}$?