Mesure et Intégration - fiche 1

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Dénombrabilité)
Deux ensembles X et Y sont équipotents s'il existe une bijection de X sur Y. Un ensemble X est dénombrable s'il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$ (autrement dit, une numérotation des éléments de X).

1. Montrer que $\mathbb{N}$ est équipotent à $2\mathbb{N}$.
2. Montrer que X et $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X ne sont pas équipotents.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$, et plus généralement N^p avec $p \in \mathbb{N}^*$, est infini dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable.
5. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
6. Montrer que $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable.

Exercice 2 (Images et images réciproques)
Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
1.1. f est surjective,
1.2. pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B$,
1.3. pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, ${}^c f(A) \subset f({}^c A)$.

De même, montrer l'équivalence des énoncés suivants :
2.1. f est injective,
2.2. pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $f^{-1}(f(A)) = A$,
2.3. pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $f({}^c A) \subset^c f(A)$,
2.4. pour tous $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 3 (Limites sup et inf)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω, on note $\limsup A_n$ l'ensemble des éléments de Ω appartenant à une infinité de A_n et $\liminf A_n$ l'ensemble des éléments de Ω appartenant à tous les A_n sauf à un nombre fini d'entre eux.

1. Ecrire les définitions de $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ à l'aide de quantificateurs, puis à l'aide d'opérations ensemblistes.

2. Calculer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans les cas suivants :

2.1. $A_n =]-\infty, a_n]$ avec $a_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ et $a_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1}$.
2.2. $A_{2p} =]0, 3 + \frac{1}{3p}[$ et $A_{2p+1} =]-1 - \frac{1}{3p}, 2]$.
2.3. $A_k = p_k\mathbb{N}$ où $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des nombres premiers.

3. Calculer $\mathbf{1}_{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, $\mathbf{1}_{\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, $\mathbf{1}_{\limsup A_n}$ et $\mathbf{1}_{\liminf A_n}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_n}$.

4. Montrer les égalités suivantes :

4.1. $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$,
4.2. $\liminf A_n \subset \limsup A_n$,
4.3. $\limsup A_n = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} = +\infty\}$,
4.4. $\liminf A_n = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n^c} < +\infty\}$,
4.5. $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$,
4.6. $\limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n$.

Exercice 4 (Formule de Poincaré)

Soient $A_1, \dots A_n \in \mathcal{P}(X)$, $n \geq 1$. Montrer que

$$\mathbf{1}_{\cup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \mathbf{1}_{\cap_{i\in I} A_i}$$

En déduire que si X est fini,

$$\mathrm{Card}\big(\cup_{i=1}^n A_i \big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \mathrm{Card}\big(\cap_{i\in I} A_i \big).$$

Exercice 5 (Fonction non Riemann intégrable)
1. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ avec } \mathrm{pgcd}(p,q) = 1. \end{cases}$$

Montrer que g est Riemann intégrable.

2. Considérons $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)$. Montrer que f n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$.

3. On rappelle que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable et on note $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une numérotation de cet ensemble. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \mathbf{1}_{\{r_1,\dots r_n\}}(x)$.

3.1. Montrer que f_n est Riemann intégrable sur $[0,1]$.

3.2. Montrer que f_n converge simplement vers f. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6 (Calcul de la série des $1/n^2$)
1. Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Riemann intégrable sur $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) e^{inx} dx = 0.$$

2. Déterminer deux réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2) \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2}.$$

En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 7 (Comparaison série-intégrale)
Soit f une fonction monotone de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\int_a^b f(x)dx$ soit convergente.

1. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\big(a + \frac{k}{n}(b-a)\big) = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\big(\frac{k\pi}{n}\big) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

En déduire la valeur de $\int_0^\pi \ln(\sin x) dx$.

Exercice 8 (Convergence des intégrales d'une suite de fonctions ne convergeant pas uniformément)
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2}.$$

1. Cette suite converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$? Sur $[a,1]$ avec $0 < a < 1$?

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

Exercice 9 (Non complétude de l'ensemble des fonctions continues muni de la norme L^1)
On considère la suite de fonctions

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

On note $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ la norme L^1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$, mais qui ne converge pas.

Exercice 10 (Intégrales à paramètre)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \Big(\int_0^x e^{-t^2} dt \Big)^2.$$

En déduire la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$