Mesure et Intégration - DS1 - 21 mars 2017

Viet Chi Tran, chi.tran@math.univ-lille1.fr

Exercice 1 (Exercice tiré de questions des fiches 1 et 2 de TD)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathcal{A}$. On note $\limsup A_n$ l'ensemble des éléments de Ω appartenant à une infinité de A_n et $\liminf A_n$ l'ensemble des éléments de Ω appartenant à tous les A_n sauf à un nombre fini d'entre eux.

1. Ecrire les définitions de $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ à l'aide de quantificateurs, puis à l'aide d'opérations ensemblistes.

2. Justifier que $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$.

3. Calculer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ lorsque $A_{2p} =]0, 3 + \frac{1}{3p}[$ et $A_{2p+1} =]-1 - \frac{1}{3p}, 2]$.

4. Calculer $\mathbf{1}_{\limsup A_n}$ et $\mathbf{1}_{\liminf A_n}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_n}$.

5. Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$, alors montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Exercice 2 (Suite d'intégrales)
On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \ \mu(dx).$$

Posons $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions mesurables.

2. Vers quelle limite cette suite converge-t-elle simplement lorsque $n \to +\infty$?

3. En déduire la limite de $I_n(\alpha)$ lorsque $n \to +\infty$. Discuter cette valeur (en fonction de α) lorsque μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, puis lorsque μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Exercice 3 (Ensemble de Cantor)
On considère l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. On définit :

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad \text{et} \quad A_{n+1} = \frac{A_n}{3} \cup \frac{2 + A_n}{3},$$

où, pour $A \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on note $\alpha + \beta A = \{x \in \mathbb{R},\ \exists y \in A,\ x = \alpha + \beta y\}$.

1. Ecrire A_2, A_3 et vérifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est la réunion de 2^n intervalles fermés d'extrémités les 2^{n+1} points de :

$$\partial A_n = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} + \frac{\varepsilon_n}{3^n}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},\ x_k \in \{0, 2\},\ \varepsilon_n \in \{0, 1\} \Big\}.$$

(On note $\partial A_n = \mathrm{adh}(A_n) \setminus \mathring{A}_n$ le bord de A_n, c'est-à-dire l'adhérence de A_n moins son intérieur.)

2. Ecrire ∂A_1 et ∂A_2. Que peut-on dire de $(\partial A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

3. Parmi les points de ∂A_n, quels sont ceux qui correspondent à un bord gauche d'intervalle ? quels sont ceux qui correspondent à un bord droit ? Qu'en déduire pour la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la mesure de Lebesgue de A_n ?

4. On définit l'ensemble de Cantor par $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Montrer que K est compact. Est-ce un ensemble mesurable ? Si oui, quelle est sa mesure de Lebesgue ? En déduire que $\mathring{K} = \emptyset$.

5. On note

$$\widetilde{K} = \Big\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ x_k \in \{0,2\} \Big\}.$$

Montrer que $\widetilde{K} \subset K$.

6. Prouver que l'application

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

est injective. A quel ensemble $\widetilde{K}$ est-il équipotent ?

7. Soit $x \in K$. Notons $x^{(n)}$ l'un des points (s'il y en a plusieurs équidistants) le plus proche de lui dans ∂A_n. Montrer que

$$|x^{(n+1)} - x^{(n)}| \leq 3^{-n}.$$

En écrivant $x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{(n)}/3^k + \varepsilon_n^{(n)}/3^n$ ce point de ∂A_n, montrer que $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ x_k^{(n+1)} \neq x_k^{(n)}\} > n$. En déduire que $\widetilde{K} = K$.

8. On considère la suite de fonctions définie par : $\forall n \geq 1$, $\forall x \in [0,1]$,

$$f_n(x) = \Big(\frac{3}{2}\Big)^n \int_0^x \mathbf{1}_{A_n}(t)dt.$$

Calculer $f_n(0)$, $f_n(1)$ et montrer que f_n est continue et croissante sur $[0,1]$. Tracer sur un même graphique f_1 et f_2.

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $x \in A_n^c$, $f_n(x) = f_{n+1}(x)$.

10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty \leq 2^{-n+1}$.

11. En déduire qu'il existe une fonction f continue croissante telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et telle que $\lambda(dx)$-p.p. $f'(x) = 0$. En déduire que pour cette fonction $\int_0^1 f'(x)\lambda(dx) < f(1) - f(0)$.