

Fiche 5 - L3 MASS - Tests

Tran Viet Chi, chi.tran@math.univ-lille1.fr, bureau 316 (bâtiment M3).

Exercice 1 (Test sur la variance d'une loi normale)

Soient X_1, \dots, X_n des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Partie 1 : On commence par considérer le cas où m est connue. On souhaite tester $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre $H_a : \sigma^2 = \sigma_1^2$, avec $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$.

1. Ecrire le modèle. Est-ce un modèle exponentiel? Est-ce un modèle à RVM?
2. Ecrire le rapport de vraisemblance.
3. En déduire une région critique pour le test ci-dessus.

Partie 2 : On considère maintenant le cas où m est inconnu. Reprendre les questions précédentes.

Exercice 2 (Poids de pièces)

Le poids des pièces produites par un fabricant suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Le fabricant garantit que les pièces qu'il produit respectent la norme $\mu_0 = 100$ g et $\sigma_0 = 0,5$ g. Cinq pièces relevées au hasard pèsent (en g) :

99,6 101,2 100,4 98,8 100,3.

On va tester si les normes du fabricant sont respectées sachant que le fabricant veut minimiser le risque de conclure à tort que les normes ne sont pas respectées.

1. Construire un test bilatéral de niveau 5% pour la moyenne μ .
2. Construire un test unilatéral à droite de niveau 1% pour la variance σ^2 .

Exercice 3 (Calcul de taille d'échantillon nécessaire)

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \mu^2)$.

1. Construire un test de $H_0 : \mu = 81$ contre $H_a : \mu = 75$.
2. Quelle taille d'échantillon n faut-il choisir pour que le test soit de niveau $\alpha = 5\%$ et pour que la puissance soit au moins égale à 95%?

Exercice 4 (Sexe des enfants)

Une enquête sur 160 familles de quatre enfants tirées au hasard permet d'établir la répartition suivante :

Nb de filles	0	1	2	3	4
Nb de familles	16	48	62	30	4

1. A chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille est supposée égale à celle d'avoir un garçon. Quelles hypothèses supplémentaires doit-on faire pour ramener à une loi de probabilité simple la variable aléatoire X ="nombre de filles dans une famille de 4 enfants".
2. Les effectifs observés sur les 160 familles sont-ils compatibles avec l'hypothèse d'égalité des probabilités des sexes? (au niveau 5%)?
3. Peut-on accepter l'hypothèse que la probabilité d'un garçon soit 0,51?