Fiche 4 - L3 MASS - Tests

Tran Viet Chi, chi.tran@math.univ-lille1.fr, bureau 316 (bâtiment M3).

Exercice 1 (Test sur les 2 paramètres d'une loi normale)
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où μ et σ sont inconnus. Donner, avec le théorème de Neyman-Pearson, la forme de la région critique permettant de tester $H_0 \ : \ \mu = 0, \ \sigma = 1$ contre $H_1 \ : \ \mu = 1, \sigma = 2$. Ce test est-il optimal ?

Exercice 2 (Test bilatéral)
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $\sigma = 2$.
1. Ecrire le modèle. Est-il exponentiel ? Est-il à rapport de vraisemblance monotone ?
2. On souhaite tester $H_0 \ : \ m \in [1,2]$ contre $H_a \ : \ m \notin [1,2]$. Donner la forme de la région critique.
3. Quelles sont les conditions pour déterminer les constantes apparaissant dans W ? Réaliser le test.
4. Même question si on souhaite tester $H_0 \ \ m = 1$ contre $H_0 \ : \ m \neq 1$.

Exercice 3 (P-valeur et puissance)
Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de v.a. i.i.d. dont la loi admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta - 1} \mathbf{1}_{0<x<1}$$

avec $\theta \in \{1, 2\}$.

Dans une première partie, on souhaite tester $H_0 \ : \ \theta = 1$ contre $H_a \ : \ \theta = 2$ avec un échantillon de taille $n = 2$ et avec la région critique $W = \{X_1 X_2 > 3/4\}$.
1. Donner le niveau du test.
2. Donner la puissance du test.

On considère maintenant n un entier non nul quelconque.
3. Ecrire la vraisemblance du modèle et donner une statistique exhaustive.
4. Trouver un test UPP pour tester $H_0 \ : \ \theta = 6$ contre $H_1 \ : \ \theta < 6$.
5. Quelle est la loi de $-2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$?
6. En déduire la puissance du test.
7. Comme évolue la puissance lorsque θ diminue ?