

## Fiche 3 - L3 MASS - Tests

**Tran Viet Chi**, [chi.tran@math.univ-lille1.fr](mailto:chi.tran@math.univ-lille1.fr), bureau 316 (bâtiment M3).

### Exercice 1 (Vecteur Gaussien)

Un bureau de poste a 1 guichet pour retirer les colis lourds. On dispose d'un échantillon de  $n = 24$  individus choisis indépendamment les uns des autres, à différents moments. On considère les variables suivantes, supposées indépendantes :

- Le temps d'attente  $X$  dans la queue, supposé suivre une loi normale d'espérance  $m_X$ .
- Le temps de service au guichet  $Y$ , où l'employé vérifie les papiers du client, supposé suivre une loi normale d'espérance  $m_Y$ .
- Le temps  $Z$  que met l'employé pour faire un trajet guichet-réserve, supposé suivre une loi normale d'espérance  $m_Z$ .

On notera  $((X_1, Y_1, Z_1), \dots, (X_n, Y_n, Z_n))$  les variables aléatoires relatives à ces individus. Toutes ces variables aléatoires sont donc indépendantes.

1. On note  $M = (\bar{X}_n, \bar{Y}_n, \bar{Z}_n)^T$ . Quelle est la loi de  $M$  ?
2. Un employé annonce que le client est servi en 15min (900 secondes) en moyenne, et que le temps moyen passé au guichet est égal au temps moyen d'attente dans la file. Faire le test pour vérifier ce que dit l'employé, si on suppose que les variances de  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont égales à  $\sigma = 100$  secondes.
3. Application numérique : (en secondes)  $\bar{X} = 220$ ,  $\bar{Y} = 180$ ,  $\bar{Z} = 310$ .
4. Qu'en est-il si  $\sigma^2$  est inconnu ?
5. Faire l'application numérique pour  $S_n^2 = 150$ .

### Exercice 2 (Approche de Neyman-Pearson)

On considère un échantillon de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

1. Ecrire le modèle et trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\lambda}$  de  $\lambda$ .
2. On souhaite tester  $H_0 : \lambda = 1$  contre  $H_1 : \lambda = 3$ . Quelle est la forme de la région critique optimale ?
3. Déterminer les constantes pour que cette région critique soit de taille  $\alpha$  asymptotiquement.
4. Comment procéder si on souhaite tester  $H_0 : \lambda \leq 1$  contre  $H_1 : \lambda > 1$  ?