

Fiche 2 - L3 MASS - Tests

Tran Viet Chi, chi.tran@math.univ-lille1.fr, bureau 316 (bâtiment M3).

Exercice 1 (Chocolat)

Une marque de tablettes de chocolat annonce que ses tablettes contiennent une teneur en cacao supérieure à 430 g par kg. On effectue un contrôle de qualité sur un échantillon de 10 tablettes et on obtient les teneurs suivantes en g/kg : 505,1 423,5 462,0 391,9 412,1 487,2 439,0 434,1 441,1 474,2.

On admet que chaque mesure suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Ecrire le modèle et les hypothèses du test qu'on veut faire.
2. On admet dans un premier temps (au vu de contrôles antérieurs) que $\sigma = 24$. Que peut-on conclure ?
3. Refaire le test si on ne suppose plus que σ est connu.

Exercice 2 (Election)

Avant une élection, un candidat affirme qu'il est sûr de dépasser le score de 30%. Un sondage est réalisé sur 500 personnes et donne 32%.

1. Ecrire le modèle statistique.
2. Pour savoir si le candidat a raison, on construit un test tel que le risque de dire qu'il a raison alors qu'il se trompe soit plus petit que 5%. Quelle est H_0 ? H_1 ?
3. Faire le test et conclure.
4. Quelle est la p-valeur du test ?
5. Reprendre les questions 2 à 5, mais pour un test qui serait asymptotiquement de niveau 5%.

Exercice 3 (Test unilatérale avec hypothèses composites)

1. Soient E_i des v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $\theta > 0$. Quelle est la loi de

$$X = \min\{n \geq 0 \mid E_1 + \dots + E_{n+1} > \theta\}.$$

2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, l'application $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(X \geq a)$ est croissante.
3. Soit $\theta_0 > 0$ fixé. En déduire une méthode de construction d'un test de $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$ basé sur une observation de X .

Exercice 4 (File d'attente)

Le nombre de personnes dans une file d'attente est supposé suivre une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ inconnu. On dispose de 10 observations, réalisation de 10 v.a. X_1, \dots, X_{10} i.i.d. de même loi que X .

1. Ecrire le modèle statistique.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ . Quelle est sa loi sous \mathbb{P}_θ ?
3. Les valeurs observées sont : 3 0 1 4 2 3 1 4 0 2. Peut-on considérer qu'il y a en moyenne moins d'une personne attendant au guichet (au niveau 5%) ?
4. Construire un test asymptotique de niveau 5% lorsque le nombre d'observations n tend vers $+\infty$.