Fiche 10 - L3 MASS - Tests

Tran Viet Chi, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`, bureau 316 (bâtiment M3).

Exercice 1 (Comparaison de la dispersion des âges dans 2 échantillons)
Nous disposons des deux échantillons suivants, supposés gaussiens :

Ech. 1	50	37	28	40	70	46	31	47	37	32
Ech. 2	29	30	55	55	40	47	36	59	35	36

1. Calculer les moyennes et variances empiriques de ces deux échantillons.
2. Faire un test d'égalité des variances.
3. Faire un test d'égalité des moyennes, en prenant en compte que la variance est inconnue. **4.** Comment pourrait-on vérifier que ces échantillons sont gaussiens ?

Exercice 2 (Comparaison de moyennes)
On considère deux échantillons gaussiens indépendants et de variance connue $\sigma^2 = 4$. Les moyennes respectives de ces deux échantillons sont $\bar{x}_1 = 1$ et $\bar{x}_2 = 1,5$.
1. Faire un test d'égalité des moyennes.
2. Quelle devrait être la valeur de $\bar{x}_2$ de façon à ce que les moyennes soient significativement différentes ?

Exercice 3 (Tests de comparaisons de moyennes et variances)
Un premier groupe de $n = 21$ étudiants a obtenu une moyenne $\hat{\mu}_1 = 12$ au partiel avec un écart-type $\hat{\sigma}_1 = 2$ et un second groupe également de 21 étudiants, une moyenne $\hat{\mu}_2 = 13,2$ avec un écart-type $\hat{\sigma}_2 = 1,8$. $\hat{\sigma}_1^2$ et $\hat{\sigma}_2^2$ sont les estimateurs sans biais corrigés des variances dans chaque groupe. On suppose que les notes sont indépendantes, de loi normale $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ pour le groupe 1, et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ pour le groupe 2. On veut tester si les étudiants du groupe 2 ont significativement mieux réussi que ceux du groupe 1.

1. Quelles sont les lois de $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\sigma}_1^2$ et $\hat{\sigma}_2^2$?
2. Tester l'égalité des variances. Sous H_0, quelle est la loi de $\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2$?ăDonner la région critique pour le test $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ contre $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$. Accepte-t-on H_0 au seuil 5% ?
2. On admet maintenant que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. On veut tester $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ contre $H_1 : \mu_1 < \mu_2$. Sous H_0, quelle loi suit $\sqrt{n}(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)$?
3. Même question pour $(n-1)(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2)$ et

$$T = \sqrt{n}\frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}}?$$

4. Donner la forme de la zone de rejet pour le second test, puis dire si on accepte ou on rejette le test (à 5%).

Exercice 4 (Classe de CP)
Dans une classe de CP, on a $n_1 = 16$ garçons et $n_2 = 15$ filles. La taille moyenne des garçons est $x_G = 126,5$ cm, avec un écart-type $s_G = 12,9$ cm. La taille moyenne des filles est $x_F = 136,9$ cm avec un écart-type de $11,9$ cm. On suppose que les deux échantillons sont gaussiens, indépendants et composés de variables indépendantes.

1. Tester l'égalité des variances.
2. Tester l'égalité des moyennes.
3. Tester, au niveau 5% si la taille des filles dépasse celle des garçons.
4. Tester si les filles ont une taille moyenne supérieure à celle des garçons d'au moins 2 cm.