

Fiche 1 - L3 MASS - Tests

Tran Viet Chi, chi.tran@math.univ-lille1.fr, bureau 316 (bâtiment M3).

Exercice 1 (Choix des hypothèses)

Vous vous promenez le long d'une voie ferrée, en pleine rêverie. Vous prenez soudain conscience d'un grand bruit derrière vous. En quoi consiste l'erreur de première espèce ? L'erreur de seconde espèce ?

Exercice 2 (Test sur la moyenne d'une Gaussienne de variance connue)

Cet exercice est une application directe du cours. Soient X_1, \dots, X_n des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\sigma = 2$ est connu. On cherche à tester $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu = 1$.

1. Ecrire le modèle statistique.
2. Calculer le maximum de vraisemblance de μ .
3. Au vu des hypothèses nulle et alternative, quelle est la forme de la région de rejet ?
4. Donner la forme exacte de la région de rejet en utilisant la loi de la statistique de test sous H_0 .
5. Montrer que le test est convergent lorsque $n \rightarrow +\infty$.
6. On suppose que $n = 100$ et que $\sum_{i=1}^n X_i = 330$. Quelle est la conclusion du test ?
7. Calculer la p-valeur.
8. Reprendre les questions 6 et 7 avec $\sum_{i=1}^n X_i = 350$.
9. On souhaite maintenant remplacer H_0 par l'hypothèse nulle suivante : $H_0 : \mu \geq 3$. Montrer que $\mu \mapsto \mathbb{P}_\mu(\bar{X}_n < A)$ est décroissante. Comment peut-on généraliser le test précédent ?
10. Que peut-on dire du test $H_0 : \mu \geq 3$ contre $H_1 : \mu > 3$?

Exercice 3 (Test sur le paramètre d'une Binômiale)

Soit S_n une v.a. de loi Binomiale $\text{Bin}(n, \theta)$, avec $\theta \in [0, 1]$.

1. Montrer que pour toute constante a , l'application $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(S_n \geq a)$ est croissante sur $[0, 1]$.
2. Soit $\theta_0 \in [0, 1]$. En déduire une méthode de construction d'un test de $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$.