Exam - Stochastic calculus - 2013

TRAN Viet Chi (chi.tran@math.univ-lille1.fr, Bureau 316 Bâtiment M3)
3 heures. Without document.

Dans tout le sujet, on considérera un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sur lequel seront définis nos processus, mouvements Browniens...

Exercice 1 (Résolution d'une EDS à volatilité géométrique, 4 pts)
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard réel, soient $b(t)$ et $\sigma(t)$ deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'EDS suivante :

$$\forall t \geq 0,\ X_t = x + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s) X_s dB_s.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité trajectorielles pour la solution de cette EDS.

2. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ le processus défini pour $t \geq 0$ par :

$$M_t = \exp\big(- \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\big).$$

Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est solution de l'EDS suivante :

$$M_t = 1 - \int_0^t \sigma(s) M_s dB_s,$$

pour laquelle on justifiera également l'existence et l'unicité de la solution.

3. Montrer que

$$\exp\big(\int_0^t \sigma^2(s)ds\big) X_t M_t = x + \int_0^t \exp\big(\int_0^s \sigma^2(r)dr\ b(s) M_s\big) ds$$

4. En déduire une expression de X_t en fonction de $(B_t)_{t\geq 0}$, b, σ.

Exercice 2 (Calcul de la transformée de Laplace de l'aire de Lévy, 7 pts)
Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ deux mouvements Browniens standards, réels, indépendants. On définit :

$$X_t = \int_0^t B_s dW_s - \int_0^t W_s dBs.$$

Ce processus est appelé *aire de Lévy*.

1. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.

2. Soient g et h deux fonctions réelles (déterministes) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et soit $\lambda > 0$. Donner la décomposition semimartingale des processus suivants :

$$Y_t = \cos(\lambda X_t), \qquad Z_t = h(t) - \frac{g(t)}{2}(B_t^2 + W_t^2).$$

3. Calculer $\langle Y, Z\rangle_t$, pour $t \geq 0$.

4. Montrer que $(Y_t \exp(Z_t))_{t\geq 0}$ est une martingale locale si les fonctions g et h vérifient le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dg}{dt}(t) = g(t)^2 - \lambda^2, \qquad \frac{dh}{dt}(t) = 2g(t).$$

5. Justifier que l'on a existence de la solution du système d'EDO ci-dessus. Ce système peut être résolu explicitement et il sera admis que pour tout $r > 0$,

$$g_r(t) = \lambda \tanh(\lambda(r-t)), \quad h_r(t) = -\log\cosh(\lambda(r-t))$$

sont solutions.

6. Justifier que $\mathbb{E}(\exp(i\lambda X_t)) = \mathbb{E}(\cos(\lambda X_t))$.

7. Déduire des questions **4.** et **6.** une expression de $\mathbb{E}(e^{i\lambda X_r})$ en fonction de λ et r.

Exercice 3 (Processus de Bessel, 9 pts)
Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux mouvements Browniens standards indépendants issus de 0. On définit, pour $t \geq 0$, par $R_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$ la distance qui sépare de l'origine un point du plan de coordonnées (X_t, Y_t). L'objectif de ce problème est d'établir une EDS que résout $(R_t)_{t\geq 0}$, puis d'étudier quelques propriétés de ce processus.

1. Montrer que $(R_t^2)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale dont on précisera la décomposition.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \leftrightarrow \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 6x - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Montrer que f est une fonction $\mathcal{C}^2$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(f(n^2 R_t^2))_{t\geq 0}$ est une semimartingale dont on précisera la décomposition

$$f(n^2R_t^2) = f(n^2R_0^2) + M_t^n + V_t^n$$

où $(M_t^n)_{t\geq 0}$ est une martingale locale et où $(V_t^n)_{t\geq 0}$ est un processus à variations finies, tous deux issus de 0.

4. Soit $t > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^t \mathbb{P}(R_s \leq 1/n)ds = 0$. Indication : on pourra majorer $\mathbb{P}(R_s \leq 1/n)$ en prenant en compte la valeur de s et en se ramenant à des intégrales.

5. Posons :

$$W_t = \int_0^t \frac{X_s \mathbf{1}_{R_s\neq 0}}{R_s} dX_s + \int_0^t \frac{Y_s \mathbf{1}_{R_s\neq 0}}{R_s} dY_s.$$

Montrer que $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien. Indication : au cours de la preuve, on pourra calculer $\mathbb{E}(\int_0^t \mathbf{1}_{R_s=0} ds)$.

6. On pose

$$H_t^n = \frac{1}{2} n(3 - n^2R_t^2)\mathbf{1}_{0<R_t\leq \frac{1}{n}} + \frac{\mathbf{1}_{R_t > \frac{1}{n}}}{R_t}.$$

Montrer que pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $N_t^n = \int_0^t X_s H_s^n dX_s + \int_0^t Y_s H_s^n dY_s$ converge dans L^2 vers W_t lorsque $n \to +\infty$.

7. Déduire des questions précédentes que R satisfait l'EDS suivante :

$$R_t = W_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s},$$

et pour tout $t > 0$, $\int_0^t ds/R_s < +\infty$ presque sûrement.

8. En utilisant l'EDS ci-dessus, montrer très simplement que pour tout réel $a > 0$

$$\mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,1]} R_t \le a\big) \le \mathbb{P}\big(\forall t \in [0,1],\ W_t \le a - \frac{t}{2a}\big).$$

9. En utilisant **9.** et le théorème de Girsanov, montrer que

$$\mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,1]} R_t \le a\big) \le e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8a^2}}.$$