Examen M2 recherche (Lille 1) - 17 mars 2010

TRAN Viet Chi (chi.tran@math.univ-lille1.fr, Bureau 316 Bâtiment M3)
Durée : **3 heures**. Documents autorisés : **Notes de cours**

Dans tout le sujet, on considérera un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sur lequel seront définis nos processus, mouvements Browniens...

Exercice 1 (Aire de Lévy)
Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux $(\mathcal{F}_t)$-mouvements Browniens indépendants, issus de 0. On définit pour tout $t \geq 0$:

$$S_t = \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s.$$

1. Calculer le crochet de S et en déduire que S est une martingale de carré intégrable.

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et soit $\lambda > 0$. A l'aide de la formule d'Itô, donner les décompositions des semimartingales :

$$\begin{aligned} Z_t &= \cos(\lambda S_t) \\ W_t &= -\frac{f'(t)}{2}(X_t^2 + Y_t^2) + f(t). \end{aligned}$$

3. Que vaut le crochet $\langle Z, W\rangle_t$?

4. Montrer que pour que le processus $(Z_t \exp(W_t))_{t\geq 0}$ est une martingale locale, il suffit que la fonction f soit solution de l'équation différentielle suivante :

$$f''(t) = f'(t)^2 - \lambda^2. \tag{1}$$

5. Soit $r > 0$. Vérifier que la fonction $f(t) = -\log\cosh(\lambda(r-t))$ est solution de l'équation différentielle (1) et en déduire $\mathbb{E}(\cos(\lambda S_r))$ en fonction d'un cosh. On rappelle que :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Exercice 2 (Prix d'un call Européen)
On considère l'EDS de Black et Scholes, avec b, $\sigma > 0$ et B un mouvement Brownien standard :

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dB_t \qquad S_0 = s_0.$$

1. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité Q équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle S est une martingale. Quel est son crochet ?

2. Considérons sous $\mathbb{P}$ la solution de l'EDS suivante :

$$M_t = s_0 + \int_0^t \sigma M_s dB_s. \tag{2}$$

Justifier pourquoi on a existence et unicité trajectorielle de la solution M ?

3. Montrer que $B_t^* = B_t - bt/\sigma$ est un Q-mouvement Brownien. En utilisant l'unicité faible de (2), justifier que pour toute fonction mesurable positive et pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}^Q\big(f(S_t)\big) = \mathbb{E}\big(f(M_t)\big),$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^Q$ l'espérance sous Q.

4. On rappelle qu'un call Européen est un actif qui rapporte à son échéance, au temps $T > 0$ la valeur $(S_T - K)_+$ avec $K > 0$. On recherche la valeur de cet actif au temps $t = 0$. Puisque S est une martingale sous Q, le prix du call sous Q est $\pi = \mathbb{E}^Q\Big((S_T - K)_+\Big)$. Calculer π (on pourra s'arrêter à l'écriture de π comme intégrale par rapport à une certaine loi normale).

Exercice 3 (Critère d'unicité de Yamada-Watanabe)
Le but de cet exercice est de montrer l'unicité trajectorielle pour l'EDS en dimension 1 suivante, sous réserve d'existence des solutions :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \tag{3}$$

avec la condition initiale $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ (déterministe), lorsque b et σ satisfont les conditions suivantes pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}|b(x) - b(y)| \leq& K|x - y| \\ |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq& K\sqrt{|x - y|},\end{aligned}$$

avec $K > 0$.

1. Soit Z une semi-martingale continue telle que $\langle Z\rangle_t = \int_0^t h_s ds$ avec $0 \leq h_s \leq C|Z_s|$ p.s. (où $C > 0$). Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t |Z_s|^{-1}\mathbf{1}_{0<|Z_s|<1} d\langle Z\rangle_s\Big) \leq Ct,$$

et en déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{E}\Big(\int_0^t \mathbf{1}_{0<|Z_s|\leq 1/n} d\langle Z\rangle_s\Big) = 0.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, soit φ_n la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = 2n(1 - nx)\mathbf{1}_{[0,1/n]}(x) + 2n(1 + nx)\mathbf{1}_{[-1/n,0[}(x).$$

Soit F_n l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$F_n''(x) = \varphi_n(x), \qquad F_n(0) = F_n'(0) = 0.$$

Donner la limite simple de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de la suite $(F_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Soient X et X' deux solutions de (3) sur le même espace filtré et avec le même mouvement Brownien B. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big(\int_0^t \varphi_n(X_s - X_s')d\langle X - X'\rangle_s\Big) = 0.$$

4. Pour $M > 0$, soit $\tau_M = \inf\{t \geq 0, |X_t| \geq M \text{ ou } |X'_t| \geq M\}$. Montrer que :

$$\mathbb{E}\Big(|X_{t\wedge\tau_M} - X'_{t\wedge\tau_M}|\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^{t\wedge\tau_M} \big(b(X_s) - b(X'_s)\big)\mathrm{sign}(X_s - X'_s)ds\Big).$$

En déduire que presque sûrement, pour tout $t \geq 0$, $X_t = X'_t$.

Exercice 4 (Inégalité de Lenglart)
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu adapté à valeurs positives et soit $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus croissant issu de 0. On considère la condition suivante :

$$\text{Pour tout temps d'arrêt borné } T, \qquad \mathbb{E}\big(X_T\big) \leq \mathbb{E}\big(A_T\big). \tag{4}$$

1. Montrer que (4) est satisfaite si M est une martingale continue de carré intégrable issue de 0, avec $X_t = M_t^2$ et $A_t = \langle M\rangle_t$.

2. Montrer que la conclusion de la question précédente reste vraie si on suppose seulement que M est une martingale locale continue issue de 0.

3. On note $X_t^* = \sup_{s\leq t} X_s$. Soit $R = \inf\{t \geq 0,\ X_t \geq c\}$. Montrer que si (4) est satisfaite, on a pour tout temps d'arrêt borné T et tout $c > 0$:

$$\mathbb{P}\big(X_T^* \geq c\big) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}\big(A_T\big). \tag{5}$$

On pourra considérer $T \wedge R$.

4. En déduire que sous (4), on a (5) pour tout temps d'arrêt T, avec la convention que $X_\infty^* = \sup_{s\geq 0} X_s$ si T prend la valeur $+\infty$.

5. Soient $c > 0$, $d > 0$, T un temps d'arrêt et $S = \inf\{t \geq 0,\ A_t \geq d\}$. En remarquant que :

$$\{X_T^* > c\} \subset \{X_{T\wedge S}^* > c\} \cup \{A_T \geq d\}$$

montrer que sous (4) :

$$\mathbb{P}\big(X_T^* \geq c\big) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}\big(A_T \wedge d\big) + \mathbb{P}\big(A_T \geq d\big).$$

6. En déduire que si $(M^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de martingales locales et T un temps d'arrêt tel que $\lim_{n\to+\infty}\langle M^n\rangle_T = 0$ en probabilité, alors on a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sup_{s\leq T}|M_s^n|\Big) = 0 \text{ en probabilité.}$$