Examen M2 recherche (Lille 1) - 23 mars 2009

TRAN Viet Chi (chi.tran@math.univ-lille1.fr, Bureau 316 Bâtiment M3)
Durée : **3 heures**. Documents autorisés : **Formulaire sur copie double**

Exercice 1 (Temps d'atteinte)
Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien stardard réel issu de 0. On considère le temps d'arrêt suivant pour $a, b > 0$:

$$T = \inf\{t \geq 0,\ B_t = -a \text{ ou } B_t = b\}. \tag{1}$$

1. Soit $x > 0$ et $t > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} B_s > x) = \mathbb{P}\big(\sup_{u\in[0,1]} \frac{B_{ut}}{\sqrt{t}} > \frac{x}{\sqrt{t}}\big) = \mathbb{P}(\sup_{u\in[0,1]} B_u > x/\sqrt{t}).$$

En déduire que $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} B_t > x) = 1$.
2. Montrer que T est une temps d'arrêt fini presque sûrement.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $(e^{\theta(B_t+a)-\theta^2 t/2})_{t\geq 0}$ est une martingale.
4. En déduire que

$$X_t = \mathrm{sh}(\theta(B_t + a))e^{-\theta^2 t/2} \tag{2}$$

où sh est le sinus hyperbolique, est une martingale.
5. Montrer que $(X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est une martingale bornée (préciser le majorant). En déduire qu'elle est fermée, et préciser par quoi.
6. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{sh}(\theta(B_T + a))e^{-\theta^2 T/2}) = \mathrm{sh}(\theta a)$.
7. On note :

$$T_{-a} = \inf\{t \geq 0,\ B_t = -a\} \text{ et } T_b = \inf\{t \geq 0,\ B_t = b\}. \tag{3}$$

Montrer que pour $\theta \neq 0$:

$$\mathbb{E}(e^{-\theta^2 T_b/2}\mathbf{1}_{T=T_b}) = \frac{\mathrm{sh}(\theta a)}{\mathrm{sh}(\theta(a+b))} \tag{4}$$

8. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(e^{-\theta^2 T_b/2}\mathbf{1}_{T=T_b})$ lorsque $\theta \to 0$?
9. En déduire $\mathbb{P}(T_{-a} < T_b)$.
10. En déduire la transformée de Laplace de T en fonction de $\mathrm{ch}(\theta(a+b)/2)$ et $\mathrm{ch}(\theta(a-b)/2)$.

Exercice 2 (EDS et fonctions d'échelle)
Soient deux mouvements Browniens réels standards indépendants issus de 0, $(B^1_t, t \geq 0)$ et $(B^2_t, t \geq 0)$. Soit $a \geq 0$. On considère :

$$X_t = U_t V_t, \quad \text{où} \quad U_t = e^{B^1_t} \quad \text{et} \quad V_t = \int_0^t e^{-B^1_s} dB^2_s + a\int_0^t e^{-B^1_s} ds. \tag{5}$$

On rappelle que $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$, $\mathrm{arcsh}'(x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.

1. En utilisant la formule d'Itô, écrire l'EDS que satisfait $(U_t, t \geq 0)$. A-t-on existence et unicité de la solution de cette EDS ?
2. Le processus $(V_t, t \geq 0)$ est-il bien défini ?

3. Calculer $\langle U, V \rangle_t$.
4. On définit :

$$W_t = \int_0^t \frac{X_s dB_s^1 + dB_s^2}{\sqrt{1 + X_s^2}}. \tag{6}$$

Calculer le crochet de ce processus. Qu'en déduisez-vous ?
5. Montrer que $(X_t, t \geq 0)$ est solution d'une EDS que l'on précisera. A-t-on existence et unicité de la solution de cette EDS ?
6. Utiliser la formule d'Itô pour écrire la décomposition en semi-martingale de $g(X_t)$ où g est de classe $\mathcal{C}^2$.
7. Proposer un choix de fonction d'échelle g.
8. Lorsque $a = 0$, en déduire X_t.
9. Dans la fin de cet exercice, on se propose de généraliser le résultat de la question 8 lorsque $a > 0$. Soit :

$$Y_t = B_t + a \int_0^t \frac{ds}{\mathrm{ch}(Y_s)}, \tag{7}$$

où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien réel standard issu de 0. Justifier que l'on ait existence et unicité d'une solution trajectorielle pour cette EDS.
10. Montrer que $(X_t, t \geq 0)$ et $(\mathrm{sh}(Y_t), t \geq 0)$ ont la même loi.
11. Commenter dans le cas $a = 0$.

Exercice 3 (Diffusion de Feller)
On considère l'EDS suivante :

$$dX_t = \alpha X_t \, ds + \sqrt{2X_t} \sigma dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}_+ \tag{8}$$

où $\alpha > 0$ et $\sigma > 0$. $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard réel issu de 0. Le coefficient de diffusion ne satisfait les hypothèses de Lipschitziannité des théorèmes d'existence et d'unicité vus en cours.

1. Nous admettons l'existence et l'unicité trajectorielle des solutions : pour une condition initiale x et un mouvement Brownien $(B_t, t \geq 0)$ fixés. Que se passe-t-il si la condition initiale est $x = 0$?
2. On admet que les solutions sont des processus fortement Markoviens homogènes, c'est-à-dire que pour tout temps d'arrêt fini p.s. et toute fonction Φ mesurable de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}_x(\Phi(X_{T+t}, t \geq 0) \,|\, \mathcal{F}_T) = \mathbb{E}_{X_T}(\Phi(X_t, \, t \geq 0)).$$

Justifiez que $\tau_0 = \inf\{t \geq 0, \, X_t = 0\}$ est un temps d'arrêt.
3. En finance, la diffusion $(X_t, t \geq 0)$ est utilisée pour modéliser certains prix qui restent toujours positifs. Expliquer pourquoi : comment se comportent qualitativement les solutions (en particulier lorsqu'elles touchent 0) ?
4. Appliquer la formule d'Itô à $f(t, X_t)$ où $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$.
5. Soit $T > 0$ et $\lambda > 0$ fixés. Soit :

$$v(t, x) = \exp\left(- \frac{\lambda e^{\alpha(T-t)} x}{\frac{\sigma^2 \lambda}{\alpha}(e^{\alpha(T-t)} - 1) + 1} \right)$$

Déduire de la question précédente que $v(t, X_t)$ est une martingale.
6. En déduire une expression de $\mathbb{E}(\exp(-\lambda X_T))$.
7. En faisant tendre λ vers $+\infty$ qu'obtient-on ?
8. Calculer $\mathbb{P}(\tau_0 < +\infty)$.
9. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_t)$. Commenter ces résultats en regard de ceux de la question 7.