M206 - Proba - Corrigé rapide DM 2, 2008

Exercice 7. Galettes des rois

1. Avant que les étudiants ne se servent, chaque étudiant a une chance sur 8 d'avoir la fève.
Pour $1 \leq i \leq 24$, la variable X_i relative i$^{\text{e}}$étudiant servi vaut 0 ou 1. Sa loi est donc une loi de Bernoulli de paramètre p_i. Les p_i ne sont pas tous égaux à $1/8$ car une fois que les étudiants ont commencé à se servir, la probabilité d'avoir la fève change : elle diminue si un étudiant précédent a pris une part avec la fève, elle augmente si un étudiant précédent a pris une part sans fève. $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(1/8)$ et conditionnellement aux variables $X_1, \cdots X_{i-1}$, $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}((N - \sum_{j=1}^{i-1} X_j)/(8N - i + 1))$ ($\sum_{j=1}^{i-1} X_j$ est le nombre de fèves tirées par les $i-1$ premiers étudiants servis, le nombre de fèves encore disponibles est donc $N - \sum_{j=1}^{i-1} X_j$, et le nombre de parts restantes est $8N - i + 1$).
Le nombre Y d'étudiants du groupe de TD qui ont eu la fève est :

$$Y = \sum_{i=1}^{24} X_i.$$

Y suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(8N, N, 24)$ (tirage sans remise de 24 parts prises parmi $8N$, dont N ont une fève) : pour $k \in [\![0, 24]\!]$, (pour simplifier, on suppose que $N \geq 24$ est assez grand, de façon à ce qu'il soit possible que personne n'ait la fève, ou que tout le monde ait la fève)

$$\mathcal{P}(Y = k) = \frac{C_N^k C_{7N}^{24-k}}{C_{8N}^{24}} = \frac{\frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{7N!}{(N-24+k)!(24-k)!}}{\frac{8N!}{24!(8N-24)!}} = \frac{N!7N!(8N-24)!}{(N-k)!(7N-24+k)!8N!} \frac{24!}{k!(24-k)!}$$

Par la formule de Stirling :

$$N! \sim \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{N!7N!(8N-24)!}{(N-k)!(7N-24+k)!8N!} \\
\sim &\sqrt{\frac{N \times 7N \times (8N-24)}{(N-k) \times (7N-24) \times 8N}} \left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k} \left(\frac{7N}{7N-24+k}\right)^{7N-24+k} \left(\frac{8N-24}{8N}\right)^{8N-24} \left(\frac{N}{8N}\right)^k \left(\frac{7N}{8N}\right)^{24-k} \\
\sim &\sqrt{\frac{N \times 7N \times (8N-24)}{(N-k) \times (7N-24) \times 8N}} \left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k} \left(\frac{7N}{7N-24+k}\right)^{7N-24+k} \left(\frac{8N-24}{8N}\right)^{8N-24} \left(\frac{1}{8}\right)^k \left(\frac{7}{8}\right)^{24-k}
\end{aligned}$$

La racine carrée tend vers 1 lorsque $N \to +\infty$. Pour le terme $(N/(N-k))^{N-k}$, en prenant le logarithme :

$$\ln\left(\left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k}\right) = -(N-k)\ln\left(1 - \frac{k}{N}\right) = k + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

On en déduit que $(N/(N-k))^{N-k} \sim e^k$. De même, les autres termes sont équivalents à e^{24-k} et e^{-24} si bien que

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(Y = k) = C_{24}^k \left(\frac{1}{8}\right)^k \left(\frac{7}{8}\right)^{24-k}$$

N étant très grand, $\mathcal{H}(8N, N, 24)$ est proche de la loi binomiale $\mathrm{Bin}(24, 1/8)$.

2. Chaque étudiant a toujours une chance sur 8 d'avoir la fève. Les variables aléatoires V_i sont des variables de Bernoulli de paramètre p'_i dépendant, comme à la question précédente des tirages précédents. Le nombre d'étudiants W qui ont eu la fève cette fois ci vaut 3 presque sûrement.

3. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.