

M206 - Proba - Corrigé rapide DM 1, 2008

Exercice 1 (Fiche 1 - Exo 5)

1. $\Omega = [1, 6]^{\mathbb{N}^*} = \{(x_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \mid \forall j \in \mathbb{N}^*, x_j \in [1, 6]\}$.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$ fixé, $A_i = \{(x_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \mid \forall j \in \mathbb{N}^*, x_j \in [1, 6] \text{ et } x_i = 1\}$.

2. $E_5 = \left(\bigcap_{j=1}^5 A_j^c\right) \cap \left(\bigcup_{j>5} A_j\right)$, $F_5 = \bigcap_{j=1}^5 A_j^c$.

3. G_5 : A partir du 5^e lancer inclus, on obtient que des 1.

H_5 : Les quatres premiers lancer ne donnent pas de 1, et à partir du 5^e lancer, on obtient que des 1.

I_5 : On obtient *au moins* un 1 après le 5^e lancer (inclus).

4. $E_5 \subset F_5$. $E_5 \cap G_5 = \emptyset$. $E_5 \cap H_5 = \emptyset$. $E_5 \subset I_5$. $F_5 \cap G_5 = \emptyset$. $F_5 \cap H_5 = \emptyset$. $F_5 \cap I_5 = E_5$. $H_5 \subset G_5$. $G_5 \subset I_5$.

$H_5 \subset I_5$.

5. $C_n = \bigcup_{j \geq n} A_j$.

6. $C_{n+1} = \bigcup_{j \geq n+1} A_j \subset A_n \cup C_{n+1} = \bigcup_{j \geq n} A_j = C_n$. Donc la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion. L'événement $\bar{C} = \bigcap_{n \geq 1} C_n$ est l'ensemble des réalisations telles que quel que soit le lancer considéré, il y a un as après (c'est à dire qu'on obtient l'as une infinité de fois).

7. $B_n = \bigcap_{j \geq n} A_j$ est l'ensemble des événements tels qu'on n'obtient plus que des as à partir du n^{e} lancer. L'événement "on n'obtient plus que des as à partir d'un certain lancer" s'écrit donc $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$.

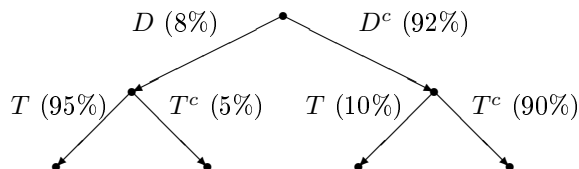
Exercice 2 (Fiche 1 - Exo 8)

1. Il y a $2^{16} = 65\,536$ codes possibles.

2. Il y a $C_{16}^1 = 16$ codes s'écrivant avec un seul zéro, $C_{16}^2 = 120$ codes s'écrivant avec 2 zéros exactement. Puisqu'un seul code s'écrit sans zéro (celui avec uniquement des 1), $2^{16} - 1 = 65\,535$ codes s'écrivent avec au moins un 0.

Exercice 3 (Fiche 2 - Exo 2)

On introduit les événements D = "la pièce est défectueuse" et T = "le test dit qu'elle est défectueuse".



On cherche la probabilité qu'une pièce soit réellement défectueuse sachant que le test la déclare défectueuse, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_T(D) &= \frac{\mathbb{P}(D \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}_D(T) \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T \cap D) + \mathbb{P}(T \cap D^c)} = \frac{\mathbb{P}_D(T) \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}_D(T) \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}_{D^c}(T) \mathbb{P}(D^c)} \\ &= \frac{0,95 \times 0,08}{0,95 \times 0,08 + 0,10 \times 0,92} \approx 0,45. \end{aligned}$$

Ceci est peu, et pour les mêmes raisons que pour l'exo 1 de la fiche 2 : le test est bon sur les mauvaises pièces, mais ces dernières sont rares et le cas le plus fréquent menant à un test indiquant une pièce défectueuse est lorsque la pièce est bonne et que le test se trompe !