

M206 - Analyse numérique - Corrigé de l'exo 4, Fiche 1

Question a Le polynôme qui interpole f aux points x_i donnés dans le tableau est un polynôme de Newton. On nous donne les valeurs $f(x_i)$ et on nous demande de retrouver le polynôme. On va pour cela utiliser la formule de Newton :

$$P_4(x) = \sum_{j=0}^4 (x - x_0) \cdots (x - x_{j-1}) [x_1, \dots, x_j] f$$

$$= [x_0] f + [x_0, x_1] f (x - x_0) + \cdots + [x_0, x_1, \dots, x_4] f (x - x_0) \cdots (x - x_3).$$

Pour calculer les coefficients $[x_1, \dots, x_j] f$, on utilise l'algorithme de calcul des différences divisées.

-2	[−2]f = f(−2) = 2					
-1	17	[−2, −1]f = $\frac{17-2}{-1-(-2)}$ = 15				
0	10	-7	$\frac{-7-15}{0-(-2)}$ = -11			
1	5	-5	1	$\frac{1+11}{1-(-2)}$ = 4		
2	2	-3	1	0	-1	

Le polynôme d'interpolation est alors :

$$P_4(x) = 2 + 15(x + 2) - 11(x + 2)(x + 1) + 4(x + 2)(x + 1)x - (x + 2)(x + 1)x(x - 1).$$

(On peut vérifier numériquement que l'on retrouve les valeurs du tableau).

Question b Pour calculer la valeur $P_4(3)$, on peut utiliser l'algorithme d'Horner (ça tombe bien, on a les centres et les coefficients obtenus par différences divisées). Ne pas oublier de ranger les centres et coefficients par ordre décroissant de monôme !

$z - x_i$		3-1=2	3	4	5
coeff	-1	4	-11	15	2
z=3	0	$-1 \times 2 = -2$	$2 \times 3 = 6$	$-5 \times 4 = -20$	$-5 \times 5 = -25$
	-1	2	-5	-5	-23