M2 – Etude de populations structurées – 12 avril 2013

Sylvie Méléard, Viet Chi Tran et Vincent Bansaye

1 Processus de diffusion avec immigration

1.1 Processus de diffusion

On considère une population dont la taille au temps t est donnée par l'équation différentielle stochastique

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \tag{1.1}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}^+$ la taille initiale, $b(x)$ et $\sigma(x)$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et B_s un mouvement brownien.

1) Donner des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir existence et unicité d'une telle équation différentielle stochastique.

2) Quelle fonctions b et σ suggérez vous pour modéliser une population où les individus se reproduisent et meurent indépendamment les uns des autres, suivant la même loi (autrement dit pas d'interaction).

3) On note $X^{(x_0)}$ le processus de diffusion issu de x_0. On rappelle que le processus X vérifie la propriété de branchement si pour tous $x_0, x_0' \geq 0$,

$$(X_t^{(x_0)} + Z_t^{(x_0')} : t \geq 0) = (X_t^{(x_0+x_0')} : t \geq 0), \quad \text{en loi}$$

où Z est un processus indépendant de X, distribué comme X.
Montrer que si $b(x) = x$ et $\sigma(x) = \sqrt{x}$, alors X vérifie la propriété de branchement.
Indication : on pourra utiliser qu'une martingale continue dont la variation quadratique est égale à t est un mouvement brownien.

4) Proposer une fonction b pour prendre en compte que les ressources sont limitées pour la population.
Indication : on pourra noter C la capacité biotique, c'est à dire la taille maximale que le milieu peut contenir.

5) Donner le générateur du processus X.

On introduit la fonction $f(x) := \int_0^x \exp\left(-\int_0^y \frac{2b(z)}{\sigma^2(z)}dz\right) dy.$

Donner une équation fonctionnelle satisfaite par les dérivées de f.

On fixe maintenant $0 < a < x_0 < c$ et on définit le temps d'arrêt

$$T := \inf\{t \geq 0 : X_t \in \{a, c\}\}.$$

6) On suppose dans cette question qu'il existe b_-, b_+ et $\sigma > 0$ tels que pour tout $x \in [a, c]$,

$$b(x) \in [b_+, b_-] \ , \ \sigma(x) = \sigma.$$

6-a) Montrer que $T < +\infty$ p.s.

6-b) Montrer que $(f(X_{t\wedge T}) : t \geq 0)$ est une martingale bornée et en déduire

$$\mathbb{P}_{x_0}(X_T = a) = \frac{f(c) - f(x_0)}{f(c) - f(a)}$$

7) Supposons que X_t soit le niveau d'infection d'une cellule. Si ce niveau atteint la valeur 1, la cellule guérit et si ce niveau atteint la valeur 10, la cellule meurt. Préciser alors la probabilité de guérison de la cellule avec les notations introduites précedemment.

1.2 Prise en compte d'une immigration

On s'intéresse maintenant au processus Y issu de $y_0 \in \mathbb{R}^+$ et vérifiant

$$Y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s)dB_s + \int_0^t b(Y_s)ds + K_t \tag{1.2}$$

où K_t est un processus ne croissant que là où Y s'annule, c'est à dire tel que pour tout t,

$$K_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{Y_s=0\}} \ dK_s. \tag{1.3}$$

On suppose que les fonctions b et σ sont lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}_+$, avec $b(0) = \sigma(0) = 0$.

On acceptera qu'alors, le processus $((Y_t, K_t), t \geq 0)$ satisfaisant (1.2) et (1.3) existe et est unique dans l'espace des processus tels que $\mathbb{E}(\sup_{t\leq T} \|Y_t\|^2) < +\infty$.

1) Que se passe -t-il quand le processus touche 0 ?

2) Si Y_t modélise le niveau d'infection d'une cellule au temps t, comment interprétez-vous la modélisation par le processus K?

3) On notera C_0^2 l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, bornées et à dérivées jusqu'à l'ordre 2 bornées, , avec $f'(0) = 0$. Donner pour une telle fonction f la décomposition de $f(Y_t)$ en semimartingale.

2 Processus de diffusion avec immigraton et branchement

Le processus Y introduit précédemment modélise l'évolution du niveau d'infection d'une cellule. A partir de maintenant, nous supposons que la cellule initiale se divise en deux, de même que les cellules filles et les suivantes, en temps continu.

2.1 Branchement local

Dans un premier temps, nous supposons que les cellules se divisent en deux indépendamment à un taux r. Les niveaux d'infection des cellules évoluent eux aussi de facon indépendante suivant l'équation différentielle stochastique (1.2).
Nous supposons pour l'instant que lorsqu'une cellule se divise et que son niveau d'infection est x, chaque cellule fille a également le niveau d'infection x à la naissance.

On note V_t l'ensemble des cellules vivantes au temps t, $N_t = \mathrm{Card}(V_t)$ son cardinal et $(Y_t^i : i \in V_t)$ les niveaux d'infection des différentes cellules au temps t.On définit

$$\nu_t(dx) = \sum_{i \in V_t} \delta_{Y_t^i}(dx)$$

la mesure ponctuelle aléatoire associée.

1) Quel processus décrit la dynamique du nombre total N_t de cellules ? Donner sa moyenne au temps t.

2) Soit A un borélien de $\mathbb{R}^+$ et $t \geq 0$ fixé. Donner une expression de $\mathbb{E}(\nu_t(A))$ en fonction de N_t et de la loi de Y_t.
A quoi correspond cette quantité pour le modèle ?
Indication : On pourra conditionner par N_t.

3) Dans les cas $b = 0$, $\sigma = 1$ et $K = 0$, étudier le comportement asymptotique, quand t tend vers l'infini de $\mathbb{E}(\nu_t([\alpha t, +\infty[))$, où $\alpha > 0$. Mettre en évidence un α critique et donner une interprétation en terme d'infection.

2.2 Branchement non local, mortalité et limite de grande population

Le niveau d'infection dans une cellule suit toujours la dynamique Y donnée dans (1.2).
Nous allons prendre en compte le fait que ce niveau d'infection a un effet sur le taux de division des cellules, et sur leur mortalité.
K est un entier fixé. La dynamique est maintenant la suivante.

- Au temps 0, on a K cellules de niveaux d'infection indépendant et de même loi.

- On attribue à chaque cellule un poids $\frac{1}{K}$.
- Une cellule de niveau d'infection x se divise au taux $r_K(x)$.
- Quand la cellule de niveau d'infection x se divise, les niveaux d'infection dans les deux cellules filles sont donnés par $x+h$ et $x-h$, où h est choisi aléatoirement suivant une loi $G_K(x, dh)$ de support $[0; x]$.
- Une cellule de niveau d'infection x meurt au taux $d_K(x)$.
- Pendant la vie d'une cellule, le niveau d'infection évolue suivant (1.2), indépendamment pour chaque cellule.

1-a) Pour K fixé, le système renormalisé est décrit au temps t par

$$\nu_t^K = \frac{1}{K}\sum_{i\in V_t}\delta_{Y_t^i},$$

où on a repris les notations de la section 2.1 pour V_t et pour $(Y_t^i, i \in V_t)$ leurs niveaux d'infection évoluant suivant la dynamique de la question (1.2). On suppose que les variables aléatoires $(Y_0^i)_{1\leq i\leq N}$ sont indépendantes et de même loi, de carré intégrable.
Soit $f \in C_0^2$. Soit τ_k, pour $k \in \mathbb{N}$ le $k$ième temps de saut de ν (division ou mort). Sur l'intervalle $[\tau_k, \tau_{k+1}[$, si la taille de la population est N, montrer que

$$\sum_{i=1}^{N} f(Y^i_{t\wedge\tau_{k+1}}) - \sum_{i=1}^{N}\left(f(Y^i_{\tau_k}) + \int_{\tau_k}^{t\wedge\tau_{k+1}}(\frac{1}{2}\sigma^2 f'' + bf')(Y_s^i)ds\right)$$

est une martingale dont on donnera la variation quadratique.

1-b) Quelle mesure $G_K(x, dh)$ permet de modéliser le branchement local de la section 2.1?

Dans toute la suite, $< .,. >$ désigne la dualité entre mesures finies et fonctions bornées (sur $\mathbb{R}_+$). Définissons pour toute mesure ponctuelle ν sur $\mathbb{R}_+$:

$$F_f(\nu) = F(<\nu, f>),$$

avec $f \in C_0^2$ et F continue bornée sur $\mathbb{R}_+$.

1-c) En déduire que les fonctions F_f sont dans le domaine du générateur étendu L_K de $(\nu_t^K, t \geq 0)$ et que pour toute mesure ponctuelle ν,

$$\begin{aligned} L_K F_f(\nu) &= \langle K\nu, d_K(.)(F_f(\nu - \frac{1}{K}\delta_.) - F_f(\nu))\rangle \\ &+\langle K\nu, r_K(.)\int(F_f(\nu - \frac{1}{K}\delta_. + \frac{1}{K}\delta_{.+h} + \frac{1}{K}\delta_{.-h}) - F_f(\nu))G_K(., dh)\rangle \\ &+F'(<\nu, f>) <\nu, (\frac{1}{2}\sigma^2 f'' + bf')> + F''(<\nu, f>) <\nu, (f'\sigma)^2> . \end{aligned}$$

2-b) Soit f une fonction de C_0^2. Donner la valeur de $L_K F_f(\nu)$ si F est la fonction identité.

En déduire que, dans le cas du branchement local et si f est une solution bornée de

$$\frac{1}{2}\sigma^2\, f'' + b\, f' + (r_K - d_K)\, f = 0$$

alors $(\langle \nu_t^K, f\rangle : t \geq 0)$ est une martingale.

Dans toute la suite, on fera les hypothèses suivantes:

$$\begin{aligned}
\int h^2 G_K(x, dh) &= \frac{\Sigma^2(x)}{K} \quad ; \quad \lim_{K\to\infty} K \int h^3 G_K(x, dh) = 0, \\
\beta(x) &= \lim_{K\to+\infty} (r_K(x) - d_K(x)) < +\infty \ ; \ \sup_x \beta(x) < +\infty \ ; \\
\rho(x) &= \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} r_K(x) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} d_K(x) < +\infty \ ; \ \sup_x \rho(x) < +\infty \ .
\end{aligned}$$

On admet que comme dans le cours, on a que pour tout $T > 0$,

$$\sup_K \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(\langle \nu_t^K, 1\rangle^3) < +\infty \quad \text{ et que } \quad \sup_K \mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} \langle \nu_t^K, 1\rangle) < +\infty.$$

3-a) Montrer que la suite des lois des processus ν^K est uniformément tendue dans l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{D}([0,T], M_F)$, où M_F désigne l'ensemble des mesures finies sur $\mathbb{R}_+$, muni de la topologie de la convergence vague.

3-b) Soit $F(x) = x$ et $f \in C_0^3$. Montrer que $L_K F_f(\nu)$ converge vers $< \nu, \mathcal{L}f >$ quand K tend vers l'infini, où

$$\mathcal{L}f = S^2 f'' + bf' + \beta f \quad \text{ avec } \quad S^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 + \rho\, \Sigma^2.$$

3-c) Que dire de la convergence de la suite $(\nu^K)_K$?
Le justifier rapidement.

3-c) Qu'en déduire pour le processus $(\langle \nu_t, f\rangle, t \geq 0)$ si la fonction f satisfait

$$S^2 f'' + bf' + \beta f = 0.$$