DM 1 - Statistique - M1 Ingé Math

Tran Viet Chi, chi.tran@math.univ-lille1.fr, bureau 316 (bâtiment M3).

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. On considère les estimateurs suivants :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

L'objet de ce DM est d'étudier moyenne et variance empiriques dans différents cas.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$. Calculer l'espérance de S_n^2. Que déduire de ces résultats ?

2. Les estimateurs $\bar{X}_n$ et S_n^2 sont-ils convergent ?

A. Cas d'une loi exponentielle

On se place ici dans le cas où les X_i suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

3. Montrer par récurrence que la loi de la somme de n variables indépendantes qui suivent une loi exponentielle de même paramètre λ est une loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$ de densité :

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}.$$

4. En déduire que dans le cas d'un échantillon de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\bar{X}_n \rightsquigarrow \frac{1}{n}\Gamma(n, \lambda)$.

5. Ecrire la vraisemblance des observations.

6. Donner une statistique suffisante.

7. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance. Cet estimateur est-il sans biais ? est-il convergent ?

B. Cas d'une loi normale

On considère maintenant le cas où les X_i suivent des loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.

8. Rappeler quelle est la loi de $\bar{X}_n$?

9. Quelle est la loi de S_n^2 ? (cette loi pourra dépendre de m et σ^2).

10. Parmi les estimateurs de la forme cS_n^{*2} de σ^2, quelle est la valeur de la constante c qui minimise le risque quadratique ? On utilisera que la variance d'une loi $\chi^2(k)$ est $2k$.

C. Cas d'une loi de Bernoulli

Maintenant, on considère un échantillon i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ de loi $\mathcal{B}(1, p)$, dont le paramètre $p \in]0, 1[$ est inconnu.

11. Ecrire le modèle associé au problème.

12. Ecrire la vraisemblance de l'échantillon et de p.

13. Donner une statistique suffisante du modèle.

14. Montrer que $\bar{X}_n$ est le seul estimateur sans biais de p et fonction de la somme $\sum_{i=1}^n X_i$.

15. Montrer qu'il n'existe pas d'estimateur $T = \psi(X_1, \dots, X_n)$ positif et sans biais de $1/p$. On pourra montrer par exemple que si $p < 1/(n+1)$, il n'existe pas d'estimateur sans biais.