DEUST GNM - Exercice corrigé

Tran Viet Chi, chi.tran@univ-lille1.fr, bureau 316 (bâtiment M3).

Exercice 1 (Equipe de pétanque)
On souhaite organiser un tournoi de pétanque avec 24 personnes réparties en 6 équipes de 4 personnes. Jean et Carl participent au tournoi. Quelle est la probabilité qu'ils soient dans la même équipe ?

★ Stratégie : comme chaque personne est répartie au hasard, toutes les possibilités d'équipes sont équiprobables. Nous allons définir l'ensemble de toutes les possibilités Ω, l'événement

$$A = \{\text{Jean et Carl sont dans la même équipe}\}$$

et calculer leurs cardinaux. La probabilité de A sera alors donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

★ Ω est l'ensemble des possibilités qu'il y a de regrouper les 24 participants en 6 équipes distinctes (chaque équipe porte un numéro) de 4 personnes (les personnes dans une équipe ne sont pas ordonnées).

1. Pour la première équipe, on a C_{24}^4 possibilités de choisir 4 personnes parmi 24 (sans remise et sans ordre).
2. Pour l'équipe 2, il reste 20 personnes à répartir. On a C_{20}^4 possibilités de choisir 4 personnes parmi 20.
3. etc. pour les équipes 3, 4, 5 et 6.

Ceci fait donc :

$$\text{card}(\Omega) = C_{24}^4 \times C_{20}^4 \times C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4 = \frac{24!}{4!20!}\frac{20!}{4!16!}\frac{16!}{4!12!}\frac{12!}{4!8!}\frac{8!}{4!4!}\frac{4!}{4!0!} = \frac{24!}{(4!)^6} = 3,25.10^{15} \text{ possibilités.}$$

★ On définit maintenant :

$$A_1 = \{\text{Jean et Carl sont dans l'équipe 1}\}$$

Il y a :

1. C_{22}^2 possibilités de compléter l'équipe 1 avec 2 joueurs choisis sans remise et sans ordre parmi les 22 restants (on a déjà placé Jean et Carl),
2. C_{20}^4 possibilité de former l'équipe 2 avec 4 joueurs choisis parmi les 20 restants etc.

Ceci fait donc :

$$\text{card}(A_1) = C_{22}^2 \times C_{20}^4 \times C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4 = \frac{22!}{2!20!}\frac{20!}{4!16!}\frac{16!}{4!12!}\frac{12!}{4!8!}\frac{8!}{4!4!}\frac{4!}{4!0!} = \frac{22!}{2!(4!)^5} = 7,06.10^{13} \text{ possibilités.}$$

★ Soit maintenant :

$$A_2 = \{\text{Jean et Carl sont dans l'équipe 2}\}$$

Il y a :

1. C_{22}^4 possibilités de former l'équipe 1 avec 4 joueurs choisis sans remise et sans ordre parmi les 22 restants (on a déjà placé Jean et Carl dans l'équipe 2),
2. C_{18}^2 possibilité de former l'équipe 2 avec 2 joueurs choisis parmi les 18 restants,
3. C_{16}^4 possibilité de former l'équipe 3 avec 4 joueurs choisis parmi les 16 restants etc.

Ceci fait donc :

$$\text{card}(A_2) = C_{22}^4 \times C_{18}^2 \times C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4 = \frac{22!}{4!18!}\frac{18!}{2!16!}\frac{16!}{4!12!}\frac{12!}{4!8!}\frac{8!}{4!4!}\frac{4!}{4!0!} = \frac{22!}{2!(4!)^5} = \text{card}(A_1).$$

★ De la même façon, si A_3 (resp. A_4, A_5 et A_6) désigne les événements "Jean et Carl sont dans l'équipe 3 (resp. 4, 5, 6)", on peut montrer que $\text{card}(A_1) = \text{card}(A_2) = \text{card}(A_3) = \text{card}(A_4) = \text{card}(A_5) = \text{card}(A_6)$. On en déduit que leurs probabilités sont égales puisqu'il s'agit du cardinal de chaque ensemble divisé par $\text{card}(\Omega)$.

★ Au final, puisque $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ et que A_1, A_2, $\ldots A_6$ sont deux à deux disjoints, on a par une formule du cours :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3)+\mathbb{P}(A_4)+\mathbb{P}(A_5)+\mathbb{P}(A_6) = 6\frac{\text{card}(A_1)}{\text{card}(\Omega)} = 6\frac{\frac{22!}{2!(4!)^5}}{\frac{24!}{(4!)^6}} = 6\frac{22!}{2!(4!)^5}\frac{(4!)^6}{24!} = 6\frac{22!4!}{2!24!} = 13\%.$$

Donc il y a 13% de chances que Jean et Carl se retrouvent dans la même équipe.