DEUST GNM - Corrigé du DM 1

TRAN Viet Chi (chi.tran@math.univ-lille1.fr, Bureau 316 Bâtiment M3)
page web : http://math.univ-lille1.fr/~tran/enseignements.html

Exercice 1 (Ballons et bonbons)
Bien sûr, il y a plusieurs façons d'écrire les ensembles proposés. La correction ci-dessous n'est pas exhaustive.

$$\begin{aligned}
D =& A \cap B \cap C \\
E =& A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c \\
F =& \{\text{Béa réussit et les deux autres ratent}\} = B \cap A^c \cap C^c \\
G =& \{\text{les 3 réussissent ou les 3 ratent}\} = D \cup E \\
H =& \{\text{Cécile réussit ou les 3 ratent}\} = C \cup E \\
I =& \{\text{Arthur rate et l'une des filles réussit}\} = A^c \cap (B \cup C)
\end{aligned}$$

Un ensemble est élémentaire s'il n'y a qu'une seule possibilité pour qu'il se réalise. Par exemple D et E sont élémentaires, mais A ne l'est pas (la possibilité "Arthur est le seul à marquer" et la possibilité "Arthur et Béatrice marquent, mais pas Cécile" sont deux éléments de A). Ainsi, sont élémentaires : D, E, F.

Exercice 2 (Ecriture binaire sur un octet)
1. L'ensemble de tous les codes possibles est :

$$\Omega = \{(a_1, \cdots a_{16}) \quad | \quad a_1, \cdots a_{16} \text{ sont soit 0 soit 1}\}$$

Chaque code est une suite ordonnée de 0 et de 1. Pour chaque position (de 1 à 16), on a deux possibilités (mettre 0 ou 1). Donc on a au total $\text{card}(\Omega) = 2^{16} = 65\,536$ possibilités.
2.1. Soit l'ensemble $A = \{\text{codes ne s'écrivant qu'avec 1 zéro}\}$. Pour dénombrer le nombre de possibilités de cet ensemble, il suffit de remarquer qu'on obtient un tel code en choisissant la position du zéro (entre 16 possibilités) les autres positions étant ensuite complétées avec des uns. On a alors $\text{card}(A) = 16$ possibilités.
2.2. Soit l'ensemble $B = \{\text{codes s'écrivant avec 2 zéros exactement}\}$. Ces codes sont obtenus en choisissant les deux positions des zéros (choix de 2 positions différentes parmi 16 possibilités : C_{16}^2) les autres positions étant ensuite complétées avec des uns. On a alors $\text{card}(B) = C_{16}^2 = \frac{16!}{2!14!} = 120$ possibilités.
2.3. Soit l'ensemble $C = \{\text{codes avec au moins un zéro}\}$. Son complémentaire C^c est l'ensemble des codes sans 0, c'est-à-dire le code $(1, 1, \cdots 1)$ composé uniquement avec des "1" ; tous les autres codes sont des éléments de C. Donc $\text{card}(C) = \text{card}(\Omega) - 1 = 65\,535$ possibilités.

Exercice 3 (Urne)
A.1. Les événements élémentaires sont équiprobables : chaque boule a la même chance d'être tirée.

A.2. Soit l'événement :

$$A = \{\text{La somme des points obtenus est paire}\}$$

Méthode : puisque les événements élémentaires sont équiprobables, on va utiliser la formule $\mathbb{P}(A) = \text{card}(A)/\text{card}(\Omega)$.
L'énoncé ne précise pas si les tirages sont ordonnés ou non. On va considérer les deux cas.
Si les tirages sont ordonnés :
• l'ensemble Ω est l'ensemble de tous les tirages ordonnés sans remise de 2 boules prises parmi 10. D'après le cours, on sait que $\text{card}(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$.
• Les tirages qui satisfont A sont ceux où on a tiré deux boules portant des numéros pairs ou deux boules portant des numéros impairs. Pour tirer 2 numéros pairs sans remise, on a 5 possibilités pour le premier numéro tiré (2, 4, 6, 8 ou 10), puis 4 possibilités pour le second soit $5 \times 4 = 20$ tirages possibles. De même, on a 20 tirages possibles de deux numéros impairs. En tout, on a $\text{card}(A) = 20 + 20 = 40$ et $\mathbb{P}(A) = 40/90 = 44.44\%$ de chances que la somme soit paire.
Si les tirages sont non ordonnés :
• l'ensemble Ω est l'ensemble de tous les tirages non ordonnés sans remise de 2 boules prises parmi 10. D'après le cours, on sait que $\text{card}(\Omega) = C_{10}^2 = 45$.
• Les tirages qui satisfont A sont ceux où on a tiré deux boules portant des numéros pairs ou deux boules portant des numéros impairs. Pour tirer 2 numéros pairs sans remise et sans ordre, on a $C_5^2 = 10$ possibilités. De même, on a 10 tirages possibles de deux numéros impairs. En tout, on a $\text{card}(A) = 10 + 10 = 20$ et $\mathbb{P}(A) = 20/45 = 44.44\%$ de chances que la somme soit paire. On retrouve (et c'est logique !) le même résultat qu'avec la méthode précédente.

A.3. Si maintenant les tirages sont ordonnés avec remise, $\text{card}(\Omega) = 10^2 = 100$ et $\text{card}(A) = 5^2 + 5^2 = 50$. Alors $\mathbb{P}(A) = 50\%$. Ce qui est logique.

B.1. Les probabilités données dans le tableau sont comprises entre 0 et 1, et leur somme vaut :

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{7}{8} + \frac{3}{24} = 1.$$

B.2. Soit l'événement $B = \{\text{Le chiffre tiré est pair}\}$. Comme les événements élémentaires ne sont plus équiprobables, il nous faut utiliser le tableau donné dans l'énoncé pour calculer les différentes probabilités :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) + \mathbb{P}(\{8\}) + \mathbb{P}(\{10\}) = \frac{3}{8} + \frac{2}{24} = \frac{11}{24} = 45,83\%$$

B.3. On a deux tirages avec remise. La probabilité de tirer deux chiffres pairs est la probabilité de tirer un chiffre pair au premier tirage fois la probabilité de tirer un chiffre pair au second tirage (faire un arbre). On a donc :

$$\frac{11}{24} \times \frac{11}{24} = 21,01\%$$

La probabilité de tirer un chiffre impair étant :

$$\mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B) = \frac{13}{24} = 54,17\%$$

on en déduit que la probabilité de tirer deux chiffres impairs est :

$$\frac{13}{24} \times \frac{13}{24} = 29,34\%$$

Donc nous avons au final $21,01 + 29,34 = 50,35\%$ de chance que la somme des deux boules tirées soit paire.