Université de Bamako - Rattrapage 2009

Modèles aléatoires en écologie et évolution - Sylvie Méléard, Chi Viet Tran

EXERCICE I

Le but de l'exercice est de modéliser une dynamique de population avec immigration.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de naissance et de mort, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de générateur Q donné pour tout $k \geq 1$ (k nombre entier), par :

$$\begin{aligned} Q_{k,k+1} &= \lambda k + a, \\ Q_{k,k-1} &= \mu k, \\ Q_{k,k} &= -(\lambda k + \mu k + a), \end{aligned}$$

où a, λ et μ sont trois réels strictement positifs.

1) Donner la chaîne de Markov incluse.

2) Soit

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = i | X_0 = j).$$

Ecrire l'équation aux dérivées partielles pour P.

3) Soit $\mathbb{E}_i(X_t) = \mathbb{E}(X_t | X_0 = i)$. Montrer que

$$\partial_t \mathbb{E}_i(X_t) = (\lambda - \mu)\mathbb{E}(X_t | X_0 = i) + a.$$

4) Calculer $\mathbb{E}_i(X_t)$.

5) Etudier la limite, quand $t \to +\infty$, de $\mathbb{E}_i(X_t)$. On pourra discuter suivant les valeurs respectives de λ et μ.

6) Soit $\pi = (\pi_j, j \in \mathbb{N}^*)$ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que

$$\pi Q = 0.$$

On suppose que $\lambda < \mu$. Montrer que pour tout $k \geq 1$

$$\pi_k = \binom{\frac{a}{\lambda} + k - 1}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0.$$

7) Montrer que

$$\pi_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{a}{\lambda}}.$$

On pourra utiliser la formule suivante : pour tout $x \in [0,1[$, pour tout $N \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{(1-x)^N} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N+k-1}{k} x^k.$$

8) En déduire π.

EXERCICE II

A) **Question préliminaire** : Justifier que $(N_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité μ si et seulement si c'est un processus à accroissements indépendants tel que pour tout $t \geq s \geq 0$, $N_t - N_s$ soit une loi de Poisson de paramètre $\mu(t-s)$.

B) Soit $(N_t^1, t \geq 0)$ et $(N_t^2, t \geq 0)$ deux processus de Poisson indépendants d'intensité respective λ_1 et λ_2. Ces deux processus sont définis par leur suite de temps de sauts : $(T_n^1)_n$ et $(T_m^2)_m$, par :

$$\begin{aligned} N_t^1 &= \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_j^1 \leq t\}} \ ; \\ N_t^2 &= \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_j^2 \leq t\}}. \end{aligned}$$

1) Quelle est la loi du couple de variables aléatoires (T_1^1, T_1^2) ?

2) En déduire la valeur de

$$\mathbb{P}(T_1^1 < T_1^2).$$

3) Quelle est loi de la variable aléatoire $\tau = \inf(T_1^1, T_1^2)$.

4) Soit $0 \leq s \leq t$. Donner la fonction génératrice de la variable aléatoire $N_t^1 - N_s^1$.

5) On définit le processus $(N_t, t \geq 0)$ par $N_t = N_t^1 + N_t^2$.
Donner la fonction génératrice de la variable aléatoire $N_t - N_s$.
En déduire que $(N_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$. (On pourra utiliser la question préliminaire A)).

6) On note R_k la suite des temps de saut de $(N_t)_t$:

$$N_t = \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\{R_j \leq t\}}.$$

On introduit également une suite $(X_j)_j$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, et indépendante du processus de Poisson $(N_t)_t$.

On définit les processus $(M_t^1)_t$ et $(M_t^2)_t$ par

$$\begin{aligned} M_t^1 &= \sum_{j\geq 1} \mathbf{1}_{\{R_j\leq t\}}\mathbf{1}_{\{X_j=1\}}; \\ M_t^2 &= \sum_{j\geq 1} \mathbf{1}_{\{R_j\leq t\}}\mathbf{1}_{\{X_j=0\}} \end{aligned}$$

Calculer, en conditionnant par la valeur de N_t, la probabilité

$$\mathbb{P}(M_t^1 = k_1; M_t^2 = k_2),$$

pour $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.
En déduire que M_t^1 et M_t^2 sont deux variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

On admettra de plus que les processus $(M_t^1)_t$ et $(M_t^2)_t$ sont des processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ_1 et λ_2.

7) On rappelle que R_{n+m-1} est le $(n+m-1)$-ième temps de saut du processus (N_t). Montrer que pour tout entier $k \leq n+m-1$, on a

$$\mathbb{P}(M^1_{R_{n+m-1}} = k) = \binom{n+m-1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}.$$

8) Justifier que pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\{T_n^1 < T_m^2\}$ a même probabilité que $\{M^1_{R_{n+m-1}} \geq n\}$, où T_n^1 et T_m^2 ont été définis au début de la question B).

9) En déduire que

$$\mathbb{P}(T_n^1 < T_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}.$$