Université de Bamako - Sylvie Méléard, Chi Viet Tran

Modèles aléatoires en écologie et évolution

L'énoncé est volontairement long. Le but est de répondre rigoureusement aux plus de questions possible.

EXERCICE I

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de naissance et mort en temps continu, issu de $X_0 > 0$ et de générateur (matrice des taux de transition)

$$Q_{i,i+1} = \lambda\, i \quad \forall i \geq 0,$$
$$Q_{i,i-1} = \mu\, i(i-1), \quad \forall i \geq 1.$$

1) 1-a) Le processus $(X_t, t \geq 0)$ peut-il atteindre 0 ?

1-b) Donner les probabilités de transition de la chaîne de Markov incluse.

1-c) Montrer que la chaîne de Markov incluse est irréductible sur $\mathbb{N}^*$. Est-elle irréductible sur $\mathbb{N}$?

2) Soit $\pi = (\pi_j, j \in \mathbb{N}^*)$ est une probabilité invariante sur $\mathbb{N}^*$, c'est à dire telle que

$$\pi\, Q = 0.$$

2-a) Déterminer l'équation satisfaite par cette probabilité invariante π.

2-b) Montrer que, pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\pi_i = \frac{\lambda^{i-1}}{i!\, \mu^{i-1}}\, \pi_1.$$

2-c) Montrer que

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu(e^{\lambda/\mu} - 1)}.$$

3) Soit Y une variable aléatoire de Poisson de paramètre $a > 0$.
3-a) Calculer $\mathbb{P}(Y > 0)$.
En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = i | Y > 0)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

3-b) Montrer que π est la loi de Poisson d'une variable aléatoire de Poisson conditionnée à rester strictement positive, dont on donnera le paramètre.

EXERCICE II

Considérons un processus de branchement binaire $(X_t, t \geq 0)$ en temps continu, issu de $X_0 = 1$. Le taux de branchement est $a > 0$ et la loi de reproduction est donnée par (p_0, p_2), où p_0 est la probabilité de ne pas avoir de descendant et p_2 est celle d'en avoir deux. On notera g la fonction génératrice de cette loi de reproduction.

1) Ecrire la matrice Q des taux de transition (le générateur) du processus X.
Soit $P(t)$ le semi-groupe de transition du processus. Justifier que pour tout $s \in]0,1[$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\sum_{j \geq 0} s^j P_{kj}(t) = \left(\sum_{j \geq 0} s^j P_{1j}(t) \right)^k .$$

2) Soit $t > 0$ et $s \in]0,1[$. On définit

$$F(t,s) = \mathbb{E}(s^{X_t}).$$

Montrer que F est solution de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t,s) = \tilde{g}(F(t,s)) \ ; \quad F(0,s) = s,$$

où

$$\tilde{g}(s) = a(g(s) - s).$$

3) Trouver la fonction F dans le cas du processus de branchement binaire où $p_0 = p_2 = \frac{1}{2}$.

4) On considère maintenant une loi de reproduction (p_0, p_2) quelconque.

4-a) Soit m est l'espérance de la loi de reproduction. Que vaut m en fonction de p_2 ?

4-b) On suppose que $m \leq 1$. Justifier qu'alors, le processus X_t tend presque-sûrement vers 0 quand t tend vers l'infini.

Dans toute la suite, on acceptera que dans le cas d'un branchement binaire quelconque,

$$F(t,s) = 1 - \frac{2(1-s)(m-1)}{(ms + m - 2)e^{-a(m-1)t} + (1-s)m} .$$

5-a) On suppose $m > 1$. Soit T_∞ le temps d'explosion du processus : $T_\infty = \lim_n T_n$, où T_n est le n-ième temps de saut du processus $(X_t, t \geq 0)$. Soit $h(t) = \mathbb{P}(t < T_\infty)$. Que vaut $h(0)$? Montrer que $h(t) = \lim_{s \to 1} F(t,s)$.
En déduire que $T_\infty = +\infty$ p.s.

5-b) On suppose dans cette question que $m > 1$. Soit T_0 le temps d'extinction du processus $(X_t, t \geq 0)$, et définissons $p(t) = \mathbb{P}(T_0 \leq t)$. Que vaut $p(0^+)$?

Montrer que $p(t) = \lim_{s\to 0} F(t,s)$.
Donner une forme explicite de $p(t)$, puis montrer que $\mathbb{P}(T_0 = \infty) = 2 - \frac{2}{m}$.

EXERCICE III

Nous étudions l'impact de la vaccination sur la transmission d'une maladie infectieuse dans une grande population d'individus. La propagation de cette maladie est modélisée par un processus de Bienaymé-Galton-Watson (BGW). Chaque malade peut, indépendamment des autres, infecter k ($k \geq 0$) individus (préalablement sains) et leur transmettre la maladie avec probabilité p_k. Il n'y a pas de guérison. On note $\mathbb{P}_i$ la loi de ce processus issu de i individus.

Nous supposons maintenant que dans cette population, chaque individu sain est vacciné avec probabilité α, $0 \leq \alpha \leq 1$ et ne peut donc pas être contaminé. (On suppose que la taille de la population est suffisamment grande pour que seule cette probabilité importe).

1) Montrer que la probabilité $p_{k,\alpha}$ qu'un individu infecté transmette réellement la maladie à k individus, est égale à :

$$p_{k,\alpha} = \sum_{j\geq k} p_j \binom{j}{k} \alpha^{j-k}(1-\alpha)^k.$$

2) Fixons $\alpha \in [0,1]$. Soit g la fonction génératrice associée à la loi (p_k), de moyenne m. Donner en fonction de g la valeur de la fonction génératrice g_α associée à la loi $(p_{k,\alpha})$.

3) En déduire le nombre moyen d'individus infectés par malade, en fonction de m.
Montrer que le nombre α_{min} minimum qu'il faut choisir, pour assurer que la maladie soit totalement enrayée est égal à $\sup(0, 1 - \frac{1}{m})$.
Commenter ce résultat.