Lecture 3

Le modèle SIR markovien standard (Bartlett, 49')

- Modèle markovien $\Rightarrow$ oubli du passé, utilisation de la loi exponentielle pour P
- On suppose $T \sim Exp(\gamma)$
- $(S(t), I(t))$ est un processus (à sauts) de Poisson inhomogène avec matrice d'intensité

$$\left(\begin{array}{ccc} (s,i) & \rightarrow & (s-1, i+1) & \lambda si/n \\ (s,i) & \rightarrow & (s, i-1) & \gamma i \end{array} \right)$$

Couplage

- **Ordre stochastique:**

$$X \leq_{sto} Y \Leftrightarrow \forall t : \quad F_X(t) \geq F_Y(t)$$

Couplage

- **Ordre stochastique:**

$$X \leq_{sto} Y \Leftrightarrow \forall t : \quad F_X(t) \geq F_Y(t)$$

- **Couplage:** $X \leq_{sto} Y$ ssi $\exists X' \sim X$ et $\exists Y' \sim Y$ tels que

$$X' \leq Y' \;\; p.s. \; .$$

Couplage

- **Ordre stochastique:**

$$X \leq_{sto} Y \Leftrightarrow \forall t : \quad F_X(t) \geq F_Y(t)$$

- **Couplage:** $X \leq_{sto} Y$ ssi $\exists X' \sim X$ et $\exists Y' \sim Y$ tels que

$$X' \leq Y' \quad p.s. \; .$$

- **Exemple:** processus de Naissance et Mort X et X' de taux respectifs (λ, μ) et (λ', μ') tels que $X(0) \leq X'(0)$, $\lambda \leq \lambda'$ et $\mu \geq \mu'$.
  Montrer que : X(.) $\leq_{sto} X'(.)$.

Première application au modèle SIR

- **Monotonie stochastique:** on considère deux modèles SIR de mêmes valeurs initiales m et n, de taux d'infection $\lambda < \lambda'$ et de même loi pour la durée d'infectiosité. Soient $N(t)$ et $N'(t)$ les nombres cumulés d'individus infectés à $t \geq 0$. Montrer que $\forall t \geq 0$:

$$N(t) \leq_{sto} N'(t).$$

Première application au modèle SIR

- **Monotonie stochastique:** on considère deux modèles SIR de mêmes valeurs initiales m et n, de taux d'infection $\lambda < \lambda'$ et de même loi pour la durée d'infectiosité. Soient $N(t)$ et $N'(t)$ les nombres cumulés d'individus infectés à $t \geq 0$. Montrer que $\forall t \geq 0$:
$$N(t) \leq_{sto} N'(t).$$

- **Indication:** Utiliser la construction de Sellke.

Application au problème de l'approximation initiale

- **Iintuition:** au début de l'épidémie les ind "I" sont disséminés au sein de la pop. et ont seulement des contacts avec les ind. "S" $\Rightarrow$ comportement de "branchement".

Application au problème de l'approximation initiale

- **Iintuition:** au début de l'épidémie les ind "I" sont disséminés au sein de la pop. et ont seulement des contacts avec les ind. "S" $\Rightarrow$ comportement de "branchement".
- **processus de branchement:**
  - A $t = 0$, m "ancêtres

Application au problème de l'approximation initiale

- **Iintuition:** au début de l'épidémie les ind "I" sont disséminés au sein de la pop. et ont seulement des contacts avec les ind. "S" $\Rightarrow$ comportement de "branchement".
- **processus de branchement:**
  - A $t = 0$, m "ancêtres
  - Les durées de vie des ind. sont i.i.d. de loi P

Application au problème de l'approximation initiale

- **Iintuition:** au début de l'épidémie les ind "I" sont disséminés au sein de la pop. et ont seulement des contacts avec les ind. "S" $\Rightarrow$ comportement de "branchement".
- **processus de branchement:**
  - A $t = 0$, m "ancêtres
  - Les durées de vie des ind. sont i.i.d. de loi P
  - Au cours de leurs vie, les individus donnent naissance à de nouv. ind., indép. les uns des autres, selon un proc. de Poisson d'intensité λ

Application au problème de l'approximation initiale

- **Iintuition:** au début de l'épidémie les ind "I" sont disséminés au sein de la pop. et ont seulement des contacts avec les ind. "S" $\Rightarrow$ comportement de "branchement".
- **processus de branchement:**
  - A $t = 0$, m "ancêtres
  - Les durées de vie des ind. sont i.i.d. de loi P
  - Au cours de leurs vie, les individus donnent naissance à de nouv. ind., indép. les uns des autres, selon un proc. de Poisson d'intensité λ
- $Y(t)$ nb d'individus vivants à $t \geq 0$.

Application au problème de l'approximation initiale

- **Iintuition:** au début de l'épidémie les ind "I" sont disséminés au sein de la pop. et ont seulement des contacts avec les ind. "S" $\Rightarrow$ comportement de "branchement".
- **processus de branchement:**
  - A $t = 0$, m "ancêtres
  - Les durées de vie des ind. sont i.i.d. de loi P
  - Au cours de leurs vie, les individus donnent naissance à de nouv. ind., indép. les uns des autres, selon un proc. de Poisson d'intensité λ
- $Y(t)$ nb d'individus vivants à $t \geq 0$.
- Soit D la v.a. décrivant le nb de descendants d'un individu

Problème de l'approximation initiale (suite)

- **Heuristique:** Soit $\mu = \int_t t dP(t)$. Le nb moyen d'ind. à la génération k est
$$m(\mathbb{E}[D])^k.$$
Donc
$$\textit{extinction p.s.} \; \Leftrightarrow \; \mathbb{E}[D] < 1.$$

Problème de l'approximation initiale (suite)

- **Heuristique:** Soit $\mu = \int_t t dP(t)$. Le nb moyen d'ind. à la génération k est
$$m(\mathbb{E}[D])^k.$$
Donc
$$\textit{extinction p.s.} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{E}[D] < 1.$$

- Supp. $\mathbb{E}[D] > 1$ et $Y(0) = m = 1$. Soit q la proba. d'extinction.

$$\begin{aligned} q &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(D_0 = k)\mathbb{P}(\textit{extinction} \mid D_0 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{P}(D_0 = k) \end{aligned}$$

Problème de l'approximation initiale (suite)

- Cond. à une durée de vie $I = t$, le nb d'enfants D d'un ind. suit une loi $Poi(\lambda t)$
  $\Leftarrow$ avec $\Phi(z) = \mathbb{E}[z^I]$ et $\mu = \mathbb{E}[I]$,

$$\mathbb{E}[z^D] = \Phi(\lambda(1 - z)) \text{ et } \mathbb{E}[D] = \mu \cdot \lambda.$$

Problème de l'approximation initiale (suite)

- Cond. à une durée de vie $I = t$, le nb d'enfants D d'un ind. suit une loi $Poi(\lambda t)$
  $\Leftarrow$ avec $\Phi(z) = \mathbb{E}[z^I]$ et $\mu = \mathbb{E}[I]$,

$$\mathbb{E}[z^D] = \Phi(\lambda(1 - z)) \text{ et } \mathbb{E}[D] = \mu \cdot \lambda.$$

- On considère le processus de branchement $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ défini par m et λ et P.

Problème de l'approximation initiale (suite)

- Cond. à une durée de vie $I = t$, le nb d'enfants D d'un ind. suit une loi $Poi(\lambda t)$
  $\Leftarrow$ avec $\Phi(z) = \mathbb{E}[z^I]$ et $\mu = \mathbb{E}[I]$,

$$\mathbb{E}[z^D] = \Phi(\lambda(1 - z)) \text{ et } \mathbb{E}[D] = \mu \cdot \lambda.$$

- On considère le processus de branchement $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ défini par m et λ et P.
- On considère une suite de modèles SIR, indexée par n: $S_n(t)$, $I_n(t)$ et $R_n(t)$ avec $S_n(0) = n$ et $I_n(0) = m$. On les construit avec la même suite i.i.d. $U_i \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

Problème de l'approximation initiale (suite)

- Cond. à une durée de vie $I = t$, le nb d'enfants D d'un ind. suit une loi $Poi(\lambda t)$
$\Leftarrow$ avec $\Phi(z) = \mathbb{E}[z^I]$ et $\mu = \mathbb{E}[I]$,
$$\mathbb{E}[z^D] = \Phi(\lambda(1-z)) \text{ et } \mathbb{E}[D] = \mu \cdot \lambda.$$

- On considère le processus de branchement $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ défini par m et λ et P.
- On considère une suite de modèles SIR, indexée par n: $S_n(t)$, $I_n(t)$ et $R_n(t)$ avec $S_n(0) = n$ et $I_n(0) = m$. On les construit avec la même suite i.i.d. $U_i \sim \mathcal{U}([0,1])$.
- Les ind. initialement sains sont numérotés $1, \ldots, n$. Les naissances correspondent à des contacts: le i-ème contact concerne l'individu $[nU_i] + 1$, s'il est encore "S", il devient infecté, sinon il est ignoré

Problème de l'approximation initiale (suite)

- Tant que les individus contactés sont "S": $I_n(t) = Y(t)$.

Problème de l'approximation initiale (suite)

- Tant que les individus contactés sont "S": $I_n(t) = Y(t)$.

Théorème

$\forall t \geq 0$: $I_n(t) \to Y(t)$.

- Si $\mu \cdot \lambda \leq 1$, la population Y s'éteint p.s. .
- Si $\mu \cdot \lambda > 1$, la population s'éteint avec proba q^m, plus petite sol. de $\Phi(\lambda(1-q)) = q$ ou explose avec la proba $1 - q^m$.

- **Interprétation du nombre de reproduction:** $R_0 = \mu \cdot \lambda$.