Invariants, cohomologie et représentations fonctorielles des groupes algébriques

Antoine Touzé

Université Paris 13

Cours Peccot
mardi 23 mars 2010

Problématique

Objectif : obtenir des informations sur $H^*(G, M)$

G un groupe algébrique
M une représentation de G

Relations entre :

(A) La théorie classique des invariants.
(XIXème - XXème siècle)

(B) La cohomologie des groupes algébriques.
(Hochschild 1961)

(C) Représentations fonctorielles.
(Friedlander et Suslin 1997)

Groupes algébriques et représentations (1)

$\mathbb{k}$ algébriquement clos.

V, W $\mathbb{k}$-e.v. dim $< \infty$,

Polynome $V \xrightarrow{P} W :=$ Si $V \simeq \mathbb{k}^n$, $W \simeq \mathbb{k}^q$ et $x = (x_1, \dots x_n) \in V$
$P(x) = (P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_q(x_1, \dots, x_n))$

Groupes algébriques et représentations (1)

$\mathbb{k}$ algébriquement clos.

V, W $\mathbb{k}$-e.v. dim $< \infty$,

Polynome $V \xrightarrow{P} W :=$ Si $V \simeq \mathbb{k}^n$, $W \simeq \mathbb{k}^q$ et $x = (x_1, \dots x_n) \in V$
$P(x) = (P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_q(x_1, \dots, x_n))$

Déf. Groupe linéaire algébrique sur $\mathbb{k}$ $:=$ $G \subset GL_n(\mathbb{k})$
$G = P^{-1}(0)$, pour $M_n(\mathbb{k}) \xrightarrow{P} \mathbb{k}^q$.

Exemples :

- $SL_n(\mathbb{k})$, $O_n(\mathbb{k})$, $SO_n(\mathbb{k})$, $Sp_n(\mathbb{k})$, Groupes finis, $(\mathbb{k}, +) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $GL_n(\mathbb{k}) = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & detM^{-1} \end{bmatrix} \subset SL_{n+1}(\mathbb{k})$

Groupes algébriques et représentations (1)

$\mathbb{k}$ algébriquement clos.

V, W $\mathbb{k}$-e.v. dim $< \infty$,

Polynome $V \xrightarrow{P} W :=$ Si $V \simeq \mathbb{k}^n$, $W \simeq \mathbb{k}^q$ et $x = (x_1, \dots x_n) \in V$
$P(x) = (P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_q(x_1, \dots, x_n))$

Déf. Groupe linéaire algébrique sur $\mathbb{k}$ $:=$ $G \subset GL_n(\mathbb{k})$
$G = P^{-1}(0)$, pour $M_n(\mathbb{k}) \xrightarrow{P} \mathbb{k}^q$.

Exemples :

- $SL_n(\mathbb{k})$, $O_n(\mathbb{k})$, $SO_n(\mathbb{k})$, $Sp_n(\mathbb{k})$, Groupes finis, $(\mathbb{k}, +) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $GL_n(\mathbb{k}) = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & detM^{-1} \end{bmatrix} \subset SL_{n+1}(\mathbb{k})$

Déf. $G \xrightarrow{f} H$ régulière $:=$ f est la restriction de $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{k}) & \xrightarrow[F]{} & M_q(\mathbb{k}) \\ \cup & & \cup \\ G & & H \end{array}$

Groupes algébriques et représentations (2)

Représentation de $G :=$ $\Bbbk$-e.v. $V +$ action $\Bbbk$-linéaire de G $\rho_V : G \to GL(V)$

Déf.

$\dim V < \infty$. V est "rationnelle" si $\rho_V : G \to GL(V)$ régulière.

$\dim V = \infty$. V est "rationnelle" si $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$, V_α rat. $\dim < \infty$.

Exemples :

- $GL(V) \curvearrowright V$ $\qquad (dim V < \infty)$.
- $$\begin{array}{ccc} GL(V) \times \Bbbk[V] & \to & \Bbbk[V] \\ (g, P(v)) & \mapsto & P(g^{-1}.v) \end{array}$$
- $\Bbbk[G] := \{G \xrightarrow{f} \Bbbk \text{ t.q. } f \text{ régulière}\}$.

$$\begin{array}{ccc} G \times \Bbbk[G] & \to & \Bbbk[G] \\ (g, P(v)) & \mapsto & P(g^{-1}.v) \end{array}$$

Théorie classique des invariants (1)

$G \curvearrowright A$, A alg. com. t.f., action par automorphismes d'alg.

Exemples : $GL(V) \curvearrowright \mathbb{k}[V]$, ou $G \subset GL(V)$.

$A^G := \{a \in A;\ \ g.a = a\ \ \forall g \in G\} \subset A$

Théorie classique des invariants = étude des propriétés de A^G

Théorie classique des invariants (1)

$G \curvearrowright A$, A alg. com. t.f., action par automorphismes d'alg.

Exemples : $GL(V) \curvearrowright \Bbbk[V]$, ou $G \subset GL(V)$.

$A^G := \{a \in A;\ \ g.a = a\ \ \forall g \in G\} \subset A$

Théorie classique des invariants = étude des propriétés de A^G

Apparition des groupes algébriques :
$G \subset GL(V) \curvearrowright \Bbbk[V]$, $\overline{G}$ adhérence de Zariski de G,

$$\Bbbk[V]^G = \Bbbk[V]^{\overline{G}}$$

Théorie classique des invariants (1)

$G \curvearrowright A$, A alg. com. t.f., action par automorphismes d'alg.

Exemples : $GL(V) \curvearrowright \Bbbk[V]$, ou $G \subset GL(V)$.

$A^G := \{a \in A;\ \ g.a = a\ \ \forall g \in G\} \subset A$

Théorie classique des invariants = étude des propriétés de A^G

Apparition des groupes algébriques :
$G \subset GL(V) \curvearrowright \Bbbk[V]$, $\overline{G}$ adhérence de Zariski de G,

$$\Bbbk[V]^G = \Bbbk[V]^{\overline{G}}$$

Problème basique : générateurs de A^G ?

- nombre fini de générateurs ?
- description des générateurs ?

Théorie classique des invariants (2)
Engendrement fini des algèbres d'invariants

Problème 1 : nombre fini de générateurs ?

Thm (Hilbert 1890) : soit $SL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright A$, A $\mathbb{C}$-alg. com. t.f..
Alors $A^{SL_n(\mathbb{C})}$ t.f.

14ème pb de Hilbert (1900) : Ce résultat se généralise-t-il pour tous groupes algébriques ? sur tous les corps $\mathbb{k}$ (alg. clos) ?

Réponse :

Théorie classique des invariants (2)
Engendrement fini des algèbres d'invariants

Problème 1 : nombre fini de générateurs ?

Thm (Hilbert 1890) : soit $SL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright A$, A $\mathbb{C}$-alg. com. t.f..
Alors $A^{SL_n(\mathbb{C})}$ t.f.

14ème pb de Hilbert (1900) : Ce résultat se généralise-t-il pour tous groupes algébriques ? sur tous les corps $\mathbb{k}$ (alg. clos) ?

Réponse : Non (c-ex. Nagata pour tout $\mathbb{k}$, 1958)

Théorie classique des invariants (2)
Engendrement fini des algèbres d'invariants

Problème 1 : nombre fini de générateurs ?

Thm (Hilbert 1890) : soit $SL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright A$, A $\mathbb{C}$-alg. com. t.f..
Alors $A^{SL_n(\mathbb{C})}$ t.f.

14ème pb de Hilbert (1900) : Ce résultat se généralise-t-il pour tous groupes algébriques ? sur tous les corps $\mathbb{k}$ (alg. clos) ?

Réponse : Non (c-ex. Nagata pour tout $\mathbb{k}$, 1958)

Années 60 : Théorie géométrique des invariants (Mumford)

Théorie classique des invariants (2)
Engendrement fini des algèbres d'invariants

Problème 1 : nombre fini de générateurs ?

Thm (Hilbert 1890) : soit $SL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright A$, A $\mathbb{C}$-alg. com. t.f..
Alors $A^{SL_n(\mathbb{C})}$ t.f.

14ème pb de Hilbert (1900) : Ce résultat se généralise-t-il pour tous groupes algébriques ? sur tous les corps $\Bbbk$ (alg. clos) ?

Réponse : Non (c-ex. Nagata pour tout $\Bbbk$, 1958)

Années 60 : Théorie géométrique des invariants (Mumford)

Déf. : G a prop (EF) si : $\forall A$ com. t.f., A^G t.f.

Thm (Nagata 1964-Haboush 1975-Popov 1979) :
Soit G un groupe algébrique linéaire sur $\Bbbk$. Alors :

G a la prop (EF) $\iff$ G est réductif.

Théorie classique des invariants (3)
Engendrement fini des algèbres d'invariants

Thm (Nagata 1964-Haboush 1975-Popov 1979) :
Soit G un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{k}$. Alors :

$$G \text{ a la prop (EF)} \iff G \text{ est réductif.}$$

Théorie classique des invariants (3)
Engendrement fini des algèbres d'invariants

Thm (Nagata 1964-Haboush 1975-Popov 1979) :
Soit G un groupe algébrique linéaire sur $\Bbbk$. Alors :

$$G \text{ a la prop (EF)} \iff G \text{ est réductif.}$$

Rappel : classif. gpes alg. ($\simeq$1958 Chevalley, Borel,...)

Théorie classique des invariants (3)
Engendrement fini des algèbres d'invariants

Thm (Nagata 1964-Haboush 1975-Popov 1979) :
Soit G un groupe algébrique linéaire sur $\Bbbk$. Alors :

$$G \text{ a la prop (EF)} \iff G \text{ est réductif.}$$

Rappel : classif. gpes alg. ($\simeq$1958 Chevalley, Borel,...)

- G unipotent si l'une des conditions équivalentes
  - G est constitué de matrices unipotentes
  - G isom. à ss-gp de $U_n(\Bbbk)$
  - $\Bbbk^{\mathrm{triv}} =$ unique représ simple de G.

Théorie classique des invariants (3)
Engendrement fini des algèbres d'invariants

Thm (Nagata 1964-Haboush 1975-Popov 1979) :
Soit G un groupe algébrique linéaire sur $\Bbbk$. Alors :

$$G \text{ a la prop (EF)} \iff G \text{ est réductif.}$$

Rappel : classif. gpes alg. ($\simeq$1958 Chevalley, Borel,...)

- G unipotent si l'une des conditions équivalentes
  - G est constitué de matrices unipotentes
  - G isom. à ss-gp de $U_n(\Bbbk)$
  - $\Bbbk^{\mathrm{triv}} =$ unique représ simple de G.

- G est réductif si $R_u(G) = \{e\}$
  ($R_u(G) =$ + grand ss-gp normal unipotent conn.)

  Groupes finis
  $GL_n(\Bbbk)$,
  $SL_n(\Bbbk), O_n(\Bbbk), SO_n(\Bbbk), Sp_n(\Bbbk)$, etc.

  Terminologie : caract. $\Bbbk = 0$:

  $$G \text{ red.} \iff \forall V \curvearrowleft G,\ V = \bigoplus V_i,\ V_i \text{ simples}$$

Théorie classique des invariants (4)
Description des générateurs

Problème 2 : description des générateurs ?

Théorie classique des invariants $\longrightarrow$ outils pour calcul de A^G

Premiers théorèmes fondamentaux $=$ gén. explicites de certaines A^G pour G groupe classique ($GL_n(\mathbb{k})$, $O_n(\mathbb{k})$, $Sp_n(\mathbb{k})$)

Théorie classique des invariants (4)
Description des générateurs

Problème 2 : description des générateurs ?

Théorie classique des invariants $\longrightarrow$ outils pour calcul de A^G

Premiers théorèmes fondamentaux $=$ gén. explicites de certaines A^G pour G groupe classique ($GL_n(\mathbb{k})$, $O_n(\mathbb{k})$, $Sp_n(\mathbb{k})$)

$G := O(V)$ préserve $(v|w)$

$A := \mathbb{k}[V^{\oplus d}]$, action par substitution linéaire :

$$(g \cdot P)(v_1, \ldots, v_d) := P(g^{-1}v_1, \ldots, g^{-1}v_d)$$

$$(i|j) : \begin{array}{ccc} V^{\oplus d} & \to & \mathbb{k} \\ (v_1, \ldots, v_d) & \mapsto & (v_i|v_j) \end{array}$$

polynome de degré 2, invariant.

Théorie classique des invariants (4)
Description des générateurs

Problème 2 : description des générateurs ?

Théorie classique des invariants $\longrightarrow$ outils pour calcul de A^G

Premiers théorèmes fondamentaux $=$ gén. explicites de certaines A^G pour G groupe classique ($GL_n(\mathbb{k})$, $O_n(\mathbb{k})$, $Sp_n(\mathbb{k})$)

$G := O(V)$ préserve $(v|w)$

$A := \mathbb{k}[V^{\oplus d}]$, action par substitution linéaire :

$$(g \cdot P)(v_1, \ldots, v_d) := P(g^{-1}v_1, \ldots, g^{-1}v_d)$$

$$(i|j) : \begin{array}{ccc} V^{\oplus d} & \to & \mathbb{k} \\ (v_1, \ldots, v_d) & \mapsto & (v_i|v_j) \end{array}$$

polynome de degré 2, invariant.

Thm (Weyl $\simeq$ 1940, car 0 - De Concini, Procesi 1976) : $A^{O(V)}$ est engendré par les $(i|j)$, $1 \leq i, j \leq d$.

Résultats analogues pour $GL_n(\mathbb{k})$, $Sp_n(\mathbb{k})$.

Cohomologie (1)

1. Le foncteur des points fixes n'est pas exact à droite :

Si $f : V \twoheadrightarrow W$ surj. G-équivariante $\qquad (f(g \cdot v) = g \cdot f(v))$.
Alors $f : V^G \to W^G$ peut etre non surj !

Ex : $G = (\mathbb{k}, +) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \curvearrowright \mathbb{k}^2 = \mathbb{k}e_1 \oplus \mathbb{k}e_2$

$(\mathbb{k}^2)^G = \mathbb{k}e_1$

$f : \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k}^{\mathrm{triv}}$, $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = 1 \in \mathbb{k}^{\mathrm{triv}}$.

$f : (\mathbb{k}^2)^G \to (\mathbb{k}^{\mathrm{triv}})^G = \mathbb{k}$ est nulle.

Cohomologie (1)

1. Le foncteur des points fixes n'est pas exact à droite :

Si $f : V \twoheadrightarrow W$ surj. G-équivariante $\qquad (f(g \cdot v) = g \cdot f(v))$.
Alors $f : V^G \to W^G$ peut etre non surj !

Ex : $G = (\mathbb{k}, +) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \curvearrowright \mathbb{k}^2 = \mathbb{k}e_1 \oplus \mathbb{k}e_2$

$(\mathbb{k}^2)^G = \mathbb{k}e_1$

$f : \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k}^{\mathrm{triv}}$, $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = 1 \in \mathbb{k}^{\mathrm{triv}}$.

$f : (\mathbb{k}^2)^G \to (\mathbb{k}^{\mathrm{triv}})^G = \mathbb{k}$ est nulle.

2. Cohomologie

Déf.(Hochschild 1961) G gpe lin. alg., V une rep. rat. de G.

$$H^i(G, V) = R^i(-^G)(V) = \mathrm{Ext}^i_{\text{rat } G\text{-mod}}(\mathbb{k}^{\mathrm{triv}}, V) \quad (i \geq 0)$$

Cohomologie (1)

1. Le foncteur des points fixes n'est pas exact à droite :

Si $f : V \twoheadrightarrow W$ surj. G-équivariante $\qquad (f(g \cdot v) = g \cdot f(v))$.
Alors $f : V^G \to W^G$ peut etre non surj !

Ex : $G = (\mathbb{k}, +) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \curvearrowright \mathbb{k}^2 = \mathbb{k}e_1 \oplus \mathbb{k}e_2$

$(\mathbb{k}^2)^G = \mathbb{k}e_1$
$f : \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k}^{\mathrm{triv}}$, $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = 1 \in \mathbb{k}^{\mathrm{triv}}$.
$f : (\mathbb{k}^2)^G \to (\mathbb{k}^{\mathrm{triv}})^G = \mathbb{k}$ est nulle.

2. Cohomologie

Déf.(Hochschild 1961) G gpe lin. alg., V une rep. rat. de G.

$$H^i(G, V) = R^i(-^G)(V) = \mathrm{Ext}^i_{\text{rat } G\text{-mod}}(\mathbb{k}^{\mathrm{triv}}, V) \quad (i \geq 0)$$

Axiomes

(1) $H^0(G, V) = V^G$
(2) Si $f : V \twoheadrightarrow W$,
$H^0(G, \ker f) \hookrightarrow H^0(G, V) \to H^0(G, W) \to H^1(G, \ker f) \to \ldots$
(3) $H^i(G, \mathbb{k}[G]) = 0$, pour $i > 0$.

Cohomologie (2)

3. Propriétés de la cohomologie ?

- Si A alg. com. t.f. avec action de G.,
  $H^*(G, A) = \bigoplus_i H^i(G, A)$ alg. contenant $A^G = H^0(G, A)$.
  nb fini de generateurs ?
- **calculs explicites ?**

Cohomologie (2)

3.Propriétés de la cohomologie ?

- Si A alg. com. t.f. avec action de G.,
  $H^*(G,A) = \bigoplus_i H^i(G,A)$ alg. contenant $A^G = H^0(G,A)$.
  nb fini de generateurs ?
- **calculs explicites ?**

Une motivation : théorie des variétés support
(>1980, Alperin, Evens, Carlson, Friedlander, Suslin...).

Cohomologie (2)

3.Propriétés de la cohomologie ?

- Si A alg. com. t.f. avec action de G.,
  $H^*(G,A) = \bigoplus_i H^i(G,A)$ alg. contenant $A^G = H^0(G,A)$.
  nb fini de generateurs ?
- **calculs explicites ?**

Une motivation : théorie des variétés support
(>1980, Alperin, Evens, Carlson, Friedlander, Suslin...).

Problème 1 : Engendrement Cohomologique Fini ?

G a prop (ECF) si $\forall A$ com t.f., $H^*(G,A)$ de type fini.

Cohomologie (2)

3.Propriétés de la cohomologie ?

- Si A alg. com. t.f. avec action de G.,
  $H^*(G,A) = \bigoplus_i H^i(G,A)$ alg. contenant $A^G = H^0(G,A)$.
  nb fini de generateurs ?
- **calculs explicites ?**

Une motivation : théorie des variétés support
(>1980, Alperin, Evens, Carlson, Friedlander, Suslin...).

Problème 1 : Engendrement Cohomologique Fini ?

G a prop (ECF) si $\forall A$ com t.f., $H^*(G,A)$ de type fini.

Conjecture de Van der Kallen (2000- démontrée 2008) :
G réductif $\Leftrightarrow$ G a prop (EF) $\Leftrightarrow$ G a prop (ECF).

Cohomologie (2)

3.Propriétés de la cohomologie ?

- Si A alg. com. t.f. avec action de G.,
  $H^*(G,A) = \bigoplus_i H^i(G,A)$ alg. contenant $A^G = H^0(G,A)$.
  nb fini de generateurs ?
- **calculs explicites ?**

Une motivation : théorie des variétés support
(>1980, Alperin, Evens, Carlson, Friedlander, Suslin...).

Problème 1 : Engendrement Cohomologique Fini ?

G a prop (ECF) si $\forall A$ com t.f., $H^*(G,A)$ de type fini.

Conjecture de Van der Kallen (2000- démontrée 2008) :
G réductif $\Leftrightarrow$ G a prop (EF) $\Leftrightarrow$ G a prop (ECF).

Problème 2 : calculs explicites ?

Outil : foncteurs strictement polynomiaux (Friedlander Suslin 97).

Plan du cours

1. **Généralités**
   - Cohomologie des schémas en groupes algébriques affines,
   - Catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ des foncteurs strictement polynomiaux
   - Extensions dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ calculent cohom de GL_n
2. **Calculs d'extensions dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$**
   - Techniques qui rendent calculs faciles
   - Calculs récents (Formule de Chalupnik).
3. **Extensions dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ calculent cohom de O_n, Sp_n**
   (premiers théorèmes fondamentaux + annulation cohomologique)
4. **Démonstration de la conjecture de van der Kallen**
   Thm (2008) :
   Si G schéma en gps alg. sur $\Bbbk$, réductif, agit sur A alg. com. t.f.
   Alors $H^*(G, A)$ alg. t.f.

   Cor : $\overline{\Bbbk}$ alg. clos, G gp lin. alg. réductif, A com. t.f.
   Alors $H^*(G, A)$ alg. t.f.

(théorie classique des invariants + suites spectrales + un calcul explicite)