MIDI MATH

De quel endroit la photo a-t-elle été prise ? ou "comment utiliser de beaux théorèmes de géométrie projective pour résoudre un problème de la vie quotidienne ?"

Conférence en deux parties par

Valerio Vassallo

La géométrie projective n'est plus enseignée au lycée et l'est très peu dans les universités. Et pourtant...elle a été source de développements extraordinaires de tout le reste de la géométrie ! Tout a commencé.... à la Renaissance où des peintres célèbres comme Leonardo da Vinci, Gian Battista Alberti, Piero della Francesca...ont introduit dans leurs tableaux "un point" qui allait jouer un rôle essentiel par la suite. Apparaît ainsi "le point de fuite puis la ligne d'horizon...". Desargues, mathématicien lyonnais "vole" aux artistes ces points pour enrichir la géométrie de son époque où deux droites parallèles ne se rencontraient jamais... Le plan s'enrichit alors des "points à l'infini" et donne naissance à un nouveau plan : le plan projectif. Plusieurs mathématiciens se mirent à travailler pour mieux apprivoiser ce nouveau plan : Poncelet, Chasles,...jusqu'à Klein, Laguerre.... et à la naissance de la géométrie algébrique actuelle... Les découvertes s'enchaînent. On s'intéresse alors aux transformations du plan qui "vivent" naturellement dans ce nouvel environnement. Vu que le point de départ a été la peinture, les projections deviennent les vedettes parmi les autres transformations. Une projection ne conserve pas les distances (c'est une évidence sur la toile !), ni le rapport (simple) des distances faisant intervenir trois points. Par contre, pour quatre points, c'est une autre affaire. Si ces points sont alignés, il existe une quantité qui est conservée, un invariant projectif : le *birapport*, ainsi nommé car il est le rapport de deux rapports. Il existe aussi un birapport pour tout faisceau de droites, c'est-à-dire tout système ordonné de quatre droites concourantes. On peut alors aller encore plus loin : on définit le birapport de quatre points cocycliques. Si A, B, C et D sont quatre points cocycliques fixés et P un point mobile sur ce même cercle alors le birapport du faisceau de droites PA, PB, PC, PD ne dépend pas de P. On va plus loin : un théorème de Chasles dit que, si on choisit quatre points distincts A, B, C, D sur une conique quelconque et P un point arbitraire sur la conique, le birapport des quatre droites PA, PB, PC et PD ne dépend pas du point P. Encore plus beau, la réciproque de ce théorème est aussi vraie : si on fixe quatre points A, B, C et D et si l'on envisage le(s) faisceau(x) de droites de sommet P dont les rayons passent, dans l'ordre, par A, B, C, D et dont le birapport a une valeur fixée, alors P est situé sur une conique passant par A, B, C et D. Autrement dit, il existe une conique pour chaque valeur du birapport. C'est cette version du théorème de Chasles qui nous aidera à déterminer d'où la photo a été prise.