

Borne d'erreur pour une méthode MR

Thomas Héart

Université Lille 1

15 septembre 2016

1 Méthodes MR

2 Borne d'erreur

3 Borne inf

4 Borne sup

5 Illustrations numériques

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

Méthodes MR

Situation du problème

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

Résoudre $Ax = b$ avec $A \in C^{n,n}$ et $b \in C^n$ de norme 1.

$\{\lambda_j\}_{j=1}^J$ valeurs propres distinctes de A

Présentation d'une méthode itérative

$$x_m \simeq A^{-1}b$$

Espaces de Krylov

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Héart

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

$$\mathcal{K}_m(A, b) = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{m-1}b\}$$

- $\mathcal{K}_m(A, b) = \{p(A)b, p \in \Pi_{m-1}\}$
- $\mathcal{K}_m(A, b) \subset \mathcal{K}_{m+1}(A, b)$
- $\exists M / \mathcal{K}_{M-1}(A, b) \neq \mathcal{K}_M(A, b) = \mathcal{K}_{M+1}(A, b) = \dots$

Méthodes MR

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

$$\begin{cases} x_m = p_{m-1}(A)b \in \mathcal{K}_m \\ r_m = b - Ax_m \perp A\mathcal{K}_m \end{cases}$$

Lemma 1

$$r_m \perp A\mathcal{K}_m \iff \|r_m\| = \min_{u \in \mathcal{K}_m} \|b - Au\|$$

Pourquoi le résidu

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

$$e_m = x_m - A^{-1}b$$

$$r_m = b - Ax_m = 0 \Rightarrow x_m = A^{-1}b$$

$$\|r_m\| \rightarrow 0 \Rightarrow x_m \rightarrow A^{-1}b$$

$$\begin{aligned}
 \|r_m\| &= \min_{u \in \mathcal{K}_m} \|b - Au\| \\
 &= \min_{p_{m-1} \in \Pi_{m-1}} \|(I - Ap_{m-1}(A))b\| \\
 &= \min_{p_m \in \Pi_m^0} \|p_m(A)b\|
 \end{aligned}$$

$$\Pi_m^0 = \{\text{polynômes } p \text{ de degré } \leq m/p(0) = 1\}$$

$$\|r_m\| \leq \|p_m(A)\|, \forall p_m \in \Pi_m^0$$

Objectif : proposer un bon choix de polynôme pour obtenir une borne d'erreur satisfaisante.

Borne d'erreur

Spectre de A

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

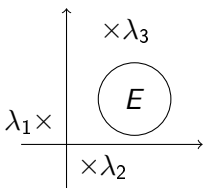
Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

$$\Lambda_0 = \{\lambda_j\}, 1 \leq j \leq d \text{ et } \Lambda_1 = \{\lambda_j\}_{j=d+1}^J$$
$$E = D(\gamma, r) / \Lambda_1 \subset E \text{ et } E \cap \Lambda_0 = \emptyset$$



$$q_d(z) = \prod_{j=1}^d \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) \in \Pi_d^0$$

Projections spectrales

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

$$X_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\lambda_j}} (\xi - A)^{-1} d\xi$$

avec Γ_{λ_j} cercle autour de λ_j qui ne contient aucune autre valeur propre de A .

- $X_j A = A X_j$
- $X_j^2 = X_j$
- $X_j X_p = 0$ si $j \neq p$
- $\sum_{j=1}^J X_j = I$

Projections spectrales 2

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Héart

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

On définit

$$Z_0 = \sum_{j=1}^d X_j$$

et

$$Z_1 = I - Z_0.$$

En posant $A_0 = Z_0 A$ et $A_1 = Z_1 A$, on a $A = A_0 + A_1$.

Proposition 2

- 1 $q_d(A_0) = 0$
- 2 $p(A) = Z_0 p(A_0) + Z_1 p(A_1), \forall p \in \Pi$

Théorème 1 (Borne d'erreur)

$$\|r_m\| \leq C_E \tau_k(E, \Lambda_0)$$

$$\tau_k(E, \Lambda_0) = \min_{s_k \in \Pi_k^0} \max_{z \in \partial E} |q_d(z) s_k(z)|$$

$$m = k + d$$

Objectif : proposer un bon choix de polynôme pour obtenir une borne d'erreur satisfaisante.

Preuve :

$$\text{Rappel : } \|r_m\| \leq \|p_m(A)\|, \forall p_m \in \Pi_m^0$$

On pose $p_m = q_d s_k$ ($m = d + k$)

$$\begin{aligned} p_m(A) &= Z_0 p_m(A_0) + Z_1 p_m(A_1) \\ &= Z_1 p_m(A_1) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial E} p_m(\xi) (\xi - A_1)^{-1} d\xi. \end{aligned}$$

On obtient la borne d'erreur

$$\|r_m\| \leq C_E \max_{z \in \partial E} |q_d(z) s_k(z)|$$

pour une constante C_E et pour tout $s_k \in \Pi_k^0$.

Borne d'erreur

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

Que vaut

$$\tau_k(E, \Lambda_0) = \min_{s_k \in \Pi_k^0} \max_{z \in \partial E} |q_d(z) s_k(z)|?$$

Sur le disque unité

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

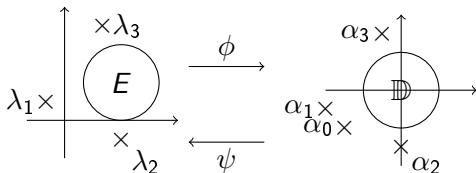
Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

$$\phi(z) = \frac{z - \gamma}{r}$$

$$\psi(w) = \phi^{-1}(w) = rw + \gamma$$



$$\alpha_0 = \phi(0) \quad (0 \notin E) \quad \text{et} \quad \alpha_j = \phi(\lambda_j) \quad \text{for } j = 1 : M$$

$$\tau_k(E, \Lambda_0) = \min_{s_k \in \Pi_k^0} \max_{w \in \partial \mathbb{D}} |q_d(\psi(w)) s_k(\psi(w))|$$

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

Borne inférieure

Théorème 2 (Borne inférieure)

$$\frac{1}{|f_k(\alpha_0)|} \leq \tau_k(E, \Lambda_0)$$

avec $f_k(w) = w^{k+d} \prod_{j=1}^M \left(\frac{w - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j w} \right)$.

Preuve :

1 $f \in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$ telle que $f(\alpha_j) = 0$, $j = 1 : M$

$$g(w) = f(w) \prod_{j=1}^M \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_j w}{w - \alpha_j} \right) \in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$$

$$\max_{w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}} |g(w)| = \max_{w \in \partial \mathbb{D}} |f(w)| = \|f\|_{\partial \mathbb{D}}$$

$$\Rightarrow \forall w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} : |f(w)| \leq \|f\|_{\partial \mathbb{D}} \prod_{j=1}^M \left| \frac{w - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j w} \right|$$

2 $f(\alpha_0) = 1$ implique $\|f\|_{\partial \mathbb{D}} \geq \prod_{j=1}^M \left| \frac{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_j} \right|$

3

$$f(w) = \frac{q_d(\psi(w)) s_k(\psi(w)) \alpha_0^{k+d}}{w^{k+d}}$$

$$\min_{s_k \in \Pi_k^0} \max_{w \in \partial \mathbb{D}} \left| \frac{q_d(\psi(w)) s_k(\psi(w)) \alpha_0^{k+d}}{w^{k+d}} \right| \geq \prod_{j=1}^M \left| \frac{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_j} \right|$$

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

Borne supérieure

Remarque

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

$f \in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$ telle que $f(\alpha_j) = 0, j = 1 : M$ et $f(\alpha_0) = 1$
implique

$$\|f\|_{\partial\mathbb{D}} \geq \prod_{j=1}^M \left| \frac{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_j} \right|$$

Cette borne est atteinte pour la fonction

$$f(w) = \prod_{j=1}^M \left(\frac{w - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j w} \right) / \left(\frac{\alpha_0 - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_0} \right)$$

Choix du polynôme

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Héart

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

$$\frac{q_d(\psi(w))s_k(\psi(w))\alpha_0^{k+d}}{w^{k+d}} \simeq \prod_{j=1}^M \left(\frac{w - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j w} \right) / \left(\frac{\alpha_0 - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_0} \right)$$

$$s_k(\psi(w)) \simeq \frac{w^{k+d}}{q_d(\psi(w))\alpha_0^{k+d}} \prod_{j=1}^M \left(\frac{w - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j w} \right) / \left(\frac{\alpha_0 - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_0} \right)$$

$$s_k(\psi(w)) = \prod_{j=1}^M \frac{1 + \bar{\alpha}_j w + \dots + (\bar{\alpha}_j w)^{k_j}}{1 + \bar{\alpha}_j \alpha_0 + \dots + (\bar{\alpha}_j \alpha_0)^{k_j}}$$

avec $k = \sum_{j=1}^M k_j$

Théorème 3 (Borne supérieure)

$$\tau_k(E, \Lambda_0) \leq \frac{1}{|f_k(\alpha_0)|} \prod_{j=1}^M \frac{1 + \frac{1}{|\alpha_j|^{k_j+1}}}{1 - \frac{1}{|\alpha_0 \alpha_j|^{k_j+1}}}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 \tau_k(E, \Lambda_0) &\leq \max_{w \in \partial \mathbb{D}} \left| \prod_{j=1}^M \frac{w - \alpha_j}{\alpha_0 - \alpha_j} \frac{1 + \bar{\alpha}_j w + \cdots + (\bar{\alpha}_j w)^{k_j}}{1 + \bar{\alpha}_j \alpha_0 + \cdots + (\bar{\alpha}_j \alpha_0)^{k_j}} \right| \\
 &= \max_{w \in \partial \mathbb{D}} \left| \prod_{j=1}^M \frac{w - \alpha_j}{\alpha_0 - \alpha_j} \frac{1 - (\bar{\alpha}_j w)^{k_j+1}}{1 - \bar{\alpha}_j w} \frac{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_0}{1 - (\bar{\alpha}_j \alpha_0)^{k_j+1}} \right| \\
 &= \max_{w \in \partial \mathbb{D}} \left| \prod_{j=1}^M \frac{w - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j w} \frac{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_j} \frac{w^{k_j+1}}{\alpha_0^{k_j+1}} \frac{1 - (\bar{\alpha}_j w)^{k_j+1}}{1 - (\bar{\alpha}_j \alpha_0)^{k_j+1}} \right| \\
 &\leq \frac{1}{|f_k(\alpha_0)|} \prod_{j=1}^M \frac{1 + \frac{1}{|\alpha_j|^{k_j+1}}}{1 - \frac{1}{|\alpha_0 \alpha_j|^{k_j+1}}}
 \end{aligned}$$

Illustrations numériques

Comparaison avec autres travaux (Ipsen)

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

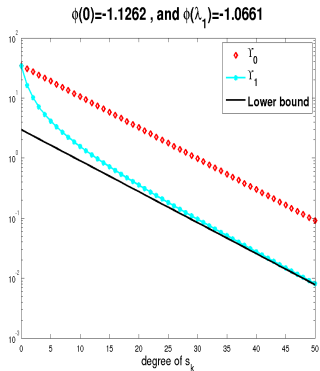
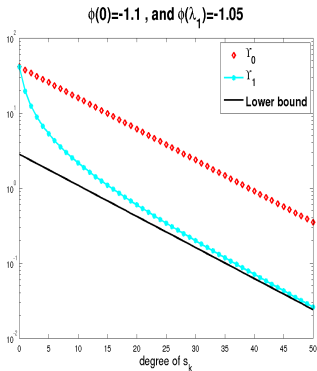
Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques



Intérêt de plusieurs outliers

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

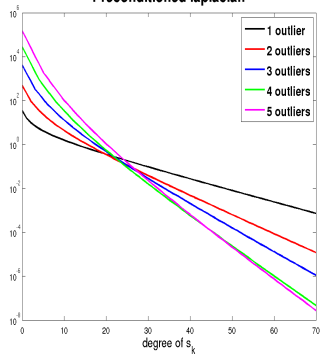
Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

Preconditioned laplacian



Comparaison avec autres travaux (CRAS)

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

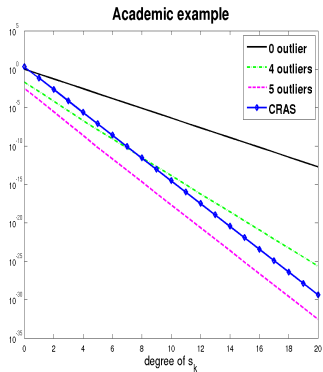
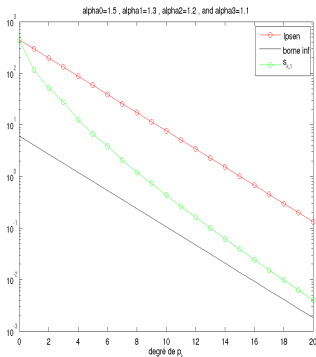
Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques



GMRES

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

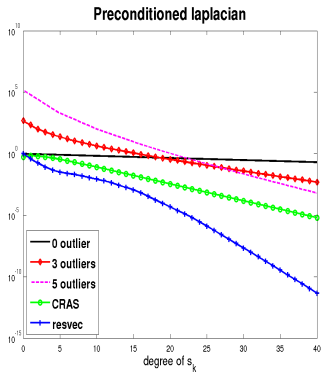
Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques



Merci

Borne
d'erreur pour
une méthode
MR

Thomas
Hélat

Méthodes
MR

Borne
d'erreur

Borne inf

Borne sup

Illustrations
numériques

Merci pour votre attention