Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Licence de Mathématiques
I.F.P. **Année 02-03**

Fiche n° 8

Ex 1. Montrer que dans le jeu de pile ou face infini, la séquence `pfffp` apparaît presque sûrement une infinité de fois. Généraliser.

Ex 2. *Estimateur de la variance*
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable ($\mathbf{E}X_1^2 < +\infty$). On pose

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad V_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2.$$

1) Vérifier que

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - M_n^2.$$

2) Montrer que V_n converge presque sûrement vers $\operatorname{Var} X_1$ quand n tend vers l'infini.

Ex 3. Soit (X_n) une suite de v.a.r. de Bernoulli indépendantes telles que :

$$P(X_i = +1) = p \qquad\qquad P(X_i = -1) = 1 - p = q \qquad 0 < p < 1 \quad p \neq \frac{1}{2}.$$

On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad A_n = \{S_n = 0\}$$

L'événement A_n est un retour à zéro.

1) Que représente l'événement $\limsup A_n$?

2) Prouver que $P(\limsup A_n) = 0$.

3) En utilisant la loi forte des grands nombres, donner une conclusion plus précise permettant de retrouver le résultat précédent.

Ex 4. On considère une épreuve ayant r issues élémentaires équiprobables (exemples : lancer d'une pièce $r = 2$, d'un dé $r = 6$, ...). On répète cette épreuve dans des conditions identiques. On note A_n l'événement : *au cours des nr premières épreuves, chacune des r issues distinctes se produit exactement n fois.* On dira que A_n est une *compensation exacte.*

1) Calculer $p_n = P(A_n)$.

2) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$ en utilisant la formule de Stirling.

3) En déduire que si $r \geq 4$, presque sûrement il n'y aura plus jamais de compensation exacte au delà d'un certain nombre d'épreuves.

Ex 5. On dit que la loi de la variable aléatoire réelle X vérifie la propriété $\mathcal{E}(t_0)$ si pour un $t_0 \geq 0$,

$$\forall t \geq t_0, \quad \mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \mathrm{e}^{-t}.$$

On note $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires vérifiant chacune la propriété $\mathcal{E}(t_0)$.

1) Montrer que

$$\forall t \geq t_0, \quad \mathbf{P}\Big(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| \geq t\Big) \leq n\mathrm{e}^{-t}.$$

2) En déduire que presque sûrement, $\max_{1\leq i\leq n} |X_i| < 3\ln n$ pour tout n assez grand.

3) Peut-on affiner ce résultat ?

Ex 6. (Examen P.I., juin 1996)

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Z_j := X_j X_{j+1}$.

1) Calculer $\operatorname{Var} Z_j$ et $\operatorname{Cov}(Z_j, Z_{j+i})$ pour $i = 1, 2, \dots$.

2) En déduire que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\Omega)} \frac{1}{4}.$$

3) Les $(Z_j)_{j\geq 1}$ sont elles mutuellement indépendantes ? Même question pour les $(Z_{2k})_{k\geq 1}$.

4) Utiliser ce qui précède pour montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{4}.$$

5) Retrouver sans calcul, la convergence L^2 de la question 2).