Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Licence de Mathématiques
I.F.P. **Année 02-03**

Fiche n° 7

Ex 1. *Génération de la loi uniforme sur l'hypographe d'une densité*

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire dont la loi a pour densité g par rapport à λ_d. On se donne une constante $c > 0$ et on pose

$$M := \big(X, cg(X)U\big),$$

où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, *indépendante* de X. On note

$$H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R};\ 0 \leq y \leq cg(x)\big\}.$$

On se propose de montrer que M suit la loi uniforme sur H.

1) Que vaut $\lambda_{d+1}(H)$?

2) Pour $A \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R}^d)$ et $B \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R})$, montrer que

$$\mathbf{P}(M \in A \times B) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x) \lambda_1\big(B \cap [0, cg(x)]\big)\, \mathrm{d}\lambda_d(x).$$

3) Pour $x \in \mathbb{R}^d$, déterminer la section $\big((A \times B) \cap H\big)_x$ et sa mesure de Lebesgue.

4) En déduire que

$$\mathbf{P}(M \in A \times B) = \frac{\lambda_{d+1}\big((A \times B) \cap H\big)}{\lambda_{d+1}(H)}$$

et conclure.

Ex 2. *Algorithme du rejet*

On voudrait simuler un vecteur aléatoire V de densité f. On suppose que l'on sait simuler un vecteur aléatoire X de densité g et trouver une constante c telle que $f \leq cg$ (nécessairement $c \geq 1$, pourquoi ?). En utilisant les exercices F4-3, F7-1 et F6-5, justifier l'algorithme suivant. Dans ce qui suit, les X_i sont des vecteurs aléatoires indépendants de même loi ayant pour densité g, les U_i des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$ et pour chaque indice i, U_i et X_i sont indépendants. L'algorithme consite simplement à générer la suite des $M_i := \big(X_i, cg(X_i)U_i\big)$ et à s'arrêter au premier indice i_0 (aléatoire) tel que $cg(X_{i_0})U_{i_0} \leq f(X_{i_0})$. On pose alors $V = X_{i_0}$ et ce vecteur aléatoire V sur $\mathbb{R}^d$ a la loi de densité f.

N.B. $V(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$, où

$$T(\omega) = \inf\big\{i \in \mathbb{N}^*;\ cg(X_i)U_i \leq f(X_i)\big\},$$

donc il n'y aucune raison pour que V ait même loi que X.

Ex 3.

1) Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et de même loi. Montrer sans calcul que $P(X + Y = Z) = P(X + Z = Y)$.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose de plus que X a une loi diffuse. Montrer que $P(X = Y) = 0$.

3) Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes de de même loi. On note F leur fonction de répartition. On définit :

$$Y = \min_{1 \le i \le n} X_i, \qquad Z = \max_{1 \le i \le n} X_i.$$

Calculer à l'aide de F les fonctions de répartition de Y et Z.

Ex 4. *Attente portuaire*

Deux bateaux A et B arrivent dans un port au cours de la même journée, respectivement aux instants X et Y. On suppose que ces instants sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur 24 heures. Le déchargement du bateau A prend quatre heures, celui de B deux heures. Si l'un des deux navires arrive alors que l'autre est en cours de déchargement, il doit attendre la fin de cette opération avant de pouvoir être déchargé. On considère les quatre événements suivants :

$E_1 = \{$ A arrive avant B et B n'attend pas pour être déchargé $\}$
$E_2 = \{$ B arrive avant A et A n'attend pas pour être déchargé $\}$
$F_1 = \{$ A arrive avant B et B attend pour être déchargé $\}$
$F_1 = \{$ B arrive avant A et A attend pour être déchargé $\}$

1) Calculer les probabilités de ces quatre événements.

2) Calculer la probabilité que A soit arrivé avant B sachant qu'aucun bateau n'a attendu pour être déchargé.

3) Soit U le temps d'attente du bateau A. Calculer $P(U = 0)$. Déterminer la loi de U (on pourra exprimer U en fonction de X, Y et F_2).

Ex 5. *Statistiques d'ordre et espacements*

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\big(X_{3:1}(\omega), X_{3:2}(\omega), X_{3:3}(\omega)\big)$ le vecteur obtenu en rangeant par ordre croissant les composantes de $\big(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega)\big)$. On définit ainsi un nouveau vecteur aléatoire (pourquoi ?). Notons en particulier que

$$\min(X_1, X_2, X_3) = X_{3:1} \le X_{3:2} \le X_{3:3} = \max(X_1, X_2, X_3).$$

Les $X_{3:i}$ s'appellent les *statistiques d'ordre* de l'échantillon (X_1, X_2, X_3). On définit ensuite les *espacements* par

$$D_{3,0} = X_{3:1}, \quad D_{3,1} = X_{3:2} - X_{3:1}, \quad D_{3,2} = X_{3:3} - X_{3:2}, \quad D_{3,3} = 1 - X_{3:3}.$$

Interpréter géométriquement toutes ces variables.

1) Montrer sans calcul que $(X_{3:1}, X_{3:2}, X_{3:3})$ suit la loi uniforme sur le simplexe $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < x < y < z < 1\}$. La densité de cette loi est donc $f = 6\mathbf{1}_C$ (pourquoi ?).

2) Donner les lois des $X_{3:i}$. Calculer leurs espérances. En déduire les espérances des espacements.

Ex 6. *Box-Muller*

1) Soient T et U deux variables aléatoires réelles indépendantes, T de loi exponentielle de paramètre 1 et U de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$(X, Y) = \big((2T)^{1/2} \cos(2\pi U), (2T)^{1/2} \sin(2\pi U)\big).$$

Déterminer la loi du vecteur aléatoire (X, Y) (par sa densité) et en déduire les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ?

2) Utiliser la question précédente pour proposer une méthode de génération de variables aléatoires gaussiennes indépendantes à partir du générateur de variables uniformes d'un ordinateur.

Ex 7. *Un exemple de vecteur gaussien dans* $\mathbb{R}^2$

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la densité est donnée par :

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\Big(-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)\Big).$$

1) Quelle est la loi de $X + Y$?

2) Calculer les lois de X et Y. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Ex 8. *Loi de la somme de deux v. a. indépendantes*

Calculer la loi de la somme de deux v.a. X et Y indépendantes dans les trois cas suivants :

a) X et Y sont de loi uniforme sur $[0, \Theta]$.
b) X et Y sont de loi exponentielle de paramètre a.
c) X et Y sont de loi de Poisson de paramètres respectifs a et b.

Ex 9. *Coordonnées sphériques d'un vecteur orthogaussien*

Soient (X, Y, Z) trois v.a.r. indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathfrak{N}(0, 1)$; soient (R, θ, φ) les coordonnées sphériques

$$X = R\cos\theta \sin\varphi, \quad Y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad Z = R\cos\varphi.$$

1) Calculer la densité du vecteur aléatoire (R, θ, φ). Que peut-on dire des variables (R, θ, φ) ?

2) Quelles sont les lois marginales respectives de (R, θ, φ) ?

3) Quelle est la loi de $T = R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$?

Ex 10. *Lois Gamma*

On note $\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} u^{a-1} \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u$. On dit qu'une variable X suit une loi $\Gamma(\lambda, a)$ avec $\lambda > 0, a > 0$ si elle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue égale à :

$$f_{\lambda,a}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer $\Gamma(a+1)$ en fonction de $\Gamma(a)$, $a > 0$. En déduire $\Gamma(n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Calculer $\mathbf{E}(X), \mathrm{Var}(X)$. Montrer que pour tout couple (a, b), $a > 0$, $b > 0$:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\,B(a,b) \quad \text{où} \quad B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.$$

2) Soient X, Y deux v.a. indépendantes, X de loi $\Gamma(\lambda, a)$, Y de loi $\Gamma(\lambda, b)$. On pose

$$U := X + Y \quad \text{et} \quad V := \frac{X}{X+Y}.$$

Calculer la loi du vecteur aléatoire (U, V), la loi de U, la loi de V ; les v.a. U et V sont-elles indépendantes ? Calculer $\Gamma(1/2)$ en choisissant $a = b = 1/2$.

3) Soit $Z = \frac{X}{Y}$. Donner la densité de Z ; $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$ existent-elles toujours ?

4) Soient $(X_i)_{i=1\cdots n}$ n variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Donner les lois de X_i^2 et de $S = \sum_{i=1}^n X_i^2$; retrouver $\Gamma(1/2)$.

5) Soient $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, n variables aléatoires indépendantes telles que X_i suit la loi $\Gamma(\lambda, a_i)$. On pose $S := \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_i := \frac{X_i}{S}$. Calculer la loi du vecteur aléatoire $(S, T_1, \dots, T_{n-1})$. Quelle est la loi de S, quelle est la loi du vecteur aléatoire $(T_1, \dots, T_{n-1})$? Les variables aléatoires $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ sont-elles indépendantes ?

Ex 11. Soient X_1, X_2 et U trois variables aléatoires indépendantes, X_1 et X_2 suivant la loi gaussienne standard $\mathfrak{N}(0,1)$ et U la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $T := U^{1/2}$.

1) Donner la densité du vecteur aléatoire (X_1, X_2, T).

2) Déterminer la loi du vecteur aléatoire (Y_1, Y_2), où

$$Y_1 := \frac{X_1 T}{(X_1^2 + X_2^2)^{1/2}}, \quad Y_2 := \frac{X_2 T}{(X_1^2 + X_2^2)^{1/2}},$$

en prenant $Y_1(\omega) = Y_2(\omega) := 0$ sur l'évènement $\{X_1^2 + X_2^2 = 0\}$ qui est de probabilité nulle (pourquoi ?). *Indication :* pour $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable, calculer $\mathbf{E}h(Y_1, Y_2)$ en utilisant le transfert $\Omega \to \mathbb{R}^3$ par le vecteur (X_1, X_2, T). Dans l'intégrale sur $\mathbb{R}^3$ ainsi obtenue, effectuer un passage en coordonnées cylindriques.