Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Licence de Mathématiques
I.F.P. **Année 02-03**

Fiche n° 6

Ex 1. *Aire d'un disque et volumes de solides de révolution*

1) En utilisant l'égalité $\lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$, calculer en coordonnées cartésiennes[1] $\lambda_2(D)$, où $D := \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sans nouveau calcul, en déduire grâce aux propriétés de la mesure de Lebesgue la formule générale pour l'aire d'un disque.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, on note Ox, Oy, Oz les axes de coordonnées, S la surface

$$S := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0,\ a \leq z \leq b,\ 0 \leq x \leq f(z)\big\},$$

où f est une fonction borélienne positive. Soit V le solide engendré par la rotation de S autour de Oz. En utilisant l'égalité $\lambda_3 = \lambda_2 \otimes \lambda_1$, donner une formule pour le calcul de $\lambda_3(V)$.

Ex 2.

1) Montrer que l'ensemble

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |y| \leq |\sin x|,\ 0 \leq x \leq \pi\}$$

est un borélien de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\lambda_2(A)$.

2) Montrer que l'ensemble

$$B := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 1,\ 0 \leq x\sqrt{y^2 + z^2} \leq 1\Big\}$$

est un borélien de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\lambda_3(B)$.

Ex 3. *Volume d'un cône*

Soit B un borélien de $\mathbb{R}^2$ et $h \in \mathbb{R}_+$. On définit dans $\mathbb{R}^3$ le cône C de sommet $S = (0, 0, h)$ et de base B comme la réunion de tous les *segments* SM lorsque M décrit B, considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. On demande d'exprimer à l'aide de h et de $\lambda_2(B)$ le volume $\lambda_3(C)$. Indication : pour $0 \leq z_0 \leq h$, l'intersection de C avec le plan horizontal d'équation $z = z_0$ est homothétique à B. Application : volume d'un tétraèdre, d'une pyramide à base carrée, d'un cône à base circulaire ou elliptique,...

[1] Le calcul est plus simple en coordonnées polaires, mais cet exercice ne présuppose pas la connaissance du théorème de changement de variable C^1 dans $\mathbb{R}^d$.

Ex 4. *Coordonnées polaires dans* $\mathbb{R}^d$

Soit S_{d-1} la *sphère unité* dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire l'ensemble des u de $\mathbb{R}^d$ dont la distance euclidienne [2] à l'origine est 1.

1) Montrer que tout x de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ a une unique représentation de la forme $x = ru$, où r est un réel strictement positif et $u \in S_{d-1}$. On a donc une bijection φ entre $]0,+\infty[\times S_{d-1}$ et $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$: $\varphi(r,u) = ru$.

2) On munit S_{d-1} de sa tribu borélienne $\mathrm{Bor}(S_{d-1})$. Comme S_{d-1} est un fermé de $\mathbb{R}^d$, elle coïncide avec la trace sur S_{d-1} des boréliens de $\mathbb{R}^d$, et aussi avec l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^d$ contenus dans S_{d-1}. Pour chaque élément A de $\mathrm{Bor}(S_{d-1})$, on pose

$$\sigma_{d-1}(A) := d \cdot \lambda_d(\tilde{A})$$

où $\tilde{A} = \{ru \in \mathbb{R}^d \mid 0 < r < 1,\ u \in A\} \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$.

a) Montrer que σ_{d-1} est une mesure sur $\big(S_{d-1}, \mathrm{Bor}(S_{d-1})\big)$.

b) On définit sur $]0,+\infty[$ muni de sa tribu borélienne la mesure μ à densité par rapport à λ :

$$\mu(A') = \int_{A'} r^{d-1}\,\mathrm{d}\lambda(r).$$

Montrer que pour tout borélien E de la forme $E = \{ru \in \mathbb{R}^d \mid r_1 < r < r_2,\ u \in A\}$, où $0 < r_1 < r_2$ et A est un ouvert de S_{d-1}, on a

$$\lambda_d(E) = \mu \otimes \sigma_{d-1}\big(\varphi^{-1}(E)\big).$$

En déduire que λ_d est égale à la mesure image de $\mu \otimes \sigma_{d-1}$ par φ.

c) Soit f une fonction mesurable positive de $\mathbb{R}^d$. En utilisant le théorème de transfert, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\lambda_d = \int_{]0,+\infty[} r^{d-1} \left\{ \int_{S_{d-1}} f(ru)\,\mathrm{d}\sigma_{d-1}(u) \right\} \mathrm{d}\lambda(r).$$

d) Vérifier que la formule obtenue coïncide avec des résultats familiers pour $d = 2$ et $d = 3$.

Ex 5. *Loi uniforme sur un hypographe et simulation d'un vecteur aléatoire*

1) Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, *i.e.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est λ_1 intégrable et $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda_1 = 1$. On note G son hypographe :

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Que vaut $\lambda_2(G)$? Soit $M = (X,Y)$ un point aléatoire (vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^2$) de loi uniforme sur G. Que peut-on dire de la loi de la variable aléatoire réelle X ? *Indication :* on pourra par exemple, calculer $\mathbf{P}(X \in]a,b])$ (faire un dessin).

[2] Question subsidiaire pour la fin de l'exercice : les résultats restent-ils valables avec d'autres distances ?

2) Généraliser le résultat précédent avec f densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, $M := (X, Y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ de loi uniforme sur l'hypographe G de f. *Indication :* pour B borélien de $\mathbb{R}^d$, poser $G_B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\,;\ 0 \leq y \leq f(x)\mathbf{1}_B(x)\}$, calculer $\lambda_{d+1}(G)$ et en déduire $\mathbf{P}(X \in B)$.

Cet exercice permet de réduire la simulation d'un vecteur aléatoire de densité donnée à celle d'un point aléatoire de loi uniforme sur son hypographe. Il sera réinvesti dans la fiche suivante où nous verrons une nouvelle version de l'algorithme du rejet...

Ex 6. Soit P une mesure de probabilité sur $\big(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R})\big)$ et F sa fonction de répartition. On pose

$$\Delta := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq x\big\}, \quad \Delta' := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq y\big\}.$$

1) Vérifier que

$$P \otimes P(\Delta) = \int_{\mathbb{R}} F \,\mathrm{d}P.$$

2) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} F \,\mathrm{d}P = \frac{1}{2} \iff \big(P(\{t\}) = 0 \quad P - \text{p.s.}\big).$$

3) En déduire

$$\int_{\mathbb{R}} F \,\mathrm{d}P = \frac{1}{2} \iff \big(\forall t \in \mathbb{R},\ P(\{t\}) = 0\big).$$

Ex 7. *Fonction de répartition et calculs d'espérances*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle définie sur cet espace et F sa fonction de répartition.

1) Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}\big((X - a)^+\big) = \int_{[a, +\infty[} \mathbf{P}(X > x) \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

2) Montrer que

$$\mathbf{E}(X^+) = \int_{[0, +\infty[} (1 - F(t)) \,\mathrm{d}\lambda(t), \quad \mathbf{E}(X^-) = \int_{]-\infty, 0]} F(t) \,\mathrm{d}\lambda(t).$$

Application : Calculer $\mathbf{E}X$ lorsque $F(x) = (1 + \mathrm{e}^{-x})^{-1}$.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction tendant vers 0 en $-\infty$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et à dérivée positive. Montrer que

$$\mathbf{E}f(X) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathbf{P}(X > x) \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Ex 8. Calculer

$$\int_{]0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{d}\lambda_2(x,y)}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

En déduire la valeur des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Ex 9. Montrer que

$$\int_{]0,1[^2} \frac{\mathrm{d}\lambda_2(x,y)}{1-xy} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ex 10. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que pour tout n, f_n soit nulle en dehors de $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ et $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

1) Montrer l'existence d'une telle suite de fonctions (f_n).

2) Pour tout (x,y) de $[0,1]\times[0,1]$, on pose

$$f(x,y) := \sum_{n\geq 1} \big(f_n(x) - f_{n+1}(x)\big) f_n(y).$$

Montrer que f est borélienne.

3) Démontrer que

$$\int_{[0,1]} \left\{ \int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x) \right\} \mathrm{d}\lambda(y) \neq \int_{[0,1]} \left\{ \int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \right\} \mathrm{d}\lambda(x).$$

En déduire que f n'est pas intégrable sur $[0,1]^2$.

4) Vérifier directement que

$$\int_{[0,1]^2} |f|\,\mathrm{d}\lambda_2 = +\infty.$$

Ex 11. On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge (par intégration par parties, elle est égale à $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$). On se propose de la calculer.

1) En appliquant le théorème de Fubini, montrer que pour tout $t>0$,

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{[0,+\infty[\times[0,t]} \mathrm{e}^{-ux} \sin x\,\mathrm{d}\lambda_2(u,x).$$

2) Vérifier que

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-ux} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}(u\sin t + \cos t)}{1+u^2}.$$

3) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est égale à $\pi/2$.

Ex 12. *Fonctions radiales et volumes de boules euclidiennes dans* $\mathbb{R}^n$

1) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = F(\|x\|)$ où F est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\|\ \|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer en utilisant le théorème de transfert que f est λ_n-intégrable sur $\mathbb{R}^n$ (λ_n mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$) si et seulement si $r^{n-1}F(r)$ est λ_1-intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}\lambda_n(x) = nV_n \int_{[0,+\infty[} r^{n-1}F(r)\,\mathrm{d}\lambda_1(r),$$

où V_n désigne le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme $\|\ \|$).

2) On choisit maintenant pour norme $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. En calculant de deux façons l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x\|^2)\,\mathrm{d}\lambda_n(x)$, montrer que :

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \text{où} \quad \Gamma(\alpha) = \int_{[0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

En déduire que

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad V_{2k+1} = \frac{2\,k!}{(2k+1)!}(4\pi)^k.$$

3) Pour quelles valeurs de α la fonction $x \mapsto \|x\|^\alpha$ est-elle intégrable :

a) sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$?

b) sur le complémentaire de cette boule ?

c) sur $\mathbb{R}^n$ tout entier ?

Ex 13. *Ellipses et ellipsoïdes*

L'aire du disque unité de $\mathbb{R}^2$ et le volume de la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^3$ étant bien connus, en déduire le calcul de :

1) l'aire de l'ellipse

$$E_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}.$$

2) le volume de l'ellipsoïde

$$E_3 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}.$$

Ex 14. *Simulation de la loi uniforme sur un triangle*

1) Soit $M = (U, V)$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur le carré $[0, 1]^2$. On note $N = (X, Y)$ le vecteur aléatoire (justifiez cette appelation) dont les composantes X et Y sont définies par

$$X := \min(U, V), \quad Y := \max(U, V).$$

Montrer que N suit la loi uniforme sur le triangle

$$T := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le y \le 1\right\}.$$

2) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application affine (composée d'une application linéaire et d'une translation). Que peut on dire de la loi de $\varphi(N)$?

3) En déduire un algorithme simple pour simuler (à partir de la génération de (U, V)) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur un triangle quelconque du plan $\mathbb{R}^2$. Comparez avec la méthode du rejet (basée sur la simulation de vecteurs de loi uniforme sur un rectangle à côtés parallèles aux axes encadrant le triangle).

Ex 15. Calculer l'aire du quadrilatère curviligne

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha x < y^2 < \beta x \text{ et } ay < x^2 < by\}$$

où $0 < \alpha < \beta$, $0 < a < b$, (poser $x^2 = uy$, $y^2 = vx$).

Ex 16. *Premier théorème de Guldin*

Dans $\mathbb{R}^3$, notons respectivement Π et Π_+ le plan et le demi plan :

$$\Pi := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\big\}, \quad \Pi_+ := \big\{(x, y, z) \in \Pi;\ x > 0\big\}.$$

On note λ_3 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$ et λ_2 la mesure de Lebesgue sur Π. Soit S un borélien borné de Π_+, tel que $\lambda_2(S) > 0$. Le centre de gravité G de S est défini comme le point G de coordonnées

$$x_G := \frac{1}{\lambda_2(S)} \int_S x \,\mathrm{d}\lambda_2(x, z), \quad y_G := 0, \quad z_G := \frac{1}{\lambda_2(S)} \int_S z \,\mathrm{d}\lambda_2(x, z).$$

1) Proposer une interprétation probabiliste de ces formules en introduisant un vecteur aléatoire prenant ses valeurs dans S.

2) On note V le borélien de $\mathbb{R}^3$ engendré par révolution de S autour de l'axe Oz. Montrer la formule de Guldin :

$$\lambda_3(V) = 2\pi x_G \lambda_2(S).$$

3) Application : en déduire une formule pour le volume du tore engendré par la rotation d'un disque autour d'un axe contenu dans le plan du disque en fonction du rayon R du disque et de la distance $a > R$ du centre du disque à l'axe.