Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Licence de Mathématiques
I.F.P. **Année 02-03**

Fiche n° 5

Ex 1. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,1[} f(x^n)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ lorsque

a) $f:]0,1[\to\overline{\mathbb{R}}_+$ est décroissante ;

b) $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ est positive et croissante.

Ex 2. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\overline{\mathbb{R}}$, λ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[}\frac{f(x)}{1+n\sin^2 x}\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Ex 3. Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(n+x)\cos(nx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ex 4. Étudier

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|^{\alpha}\mathrm{d}x,\quad \alpha>0.$$

Ex 5. Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{d}x \quad\text{et}\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Ex 6. Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\cdot$ En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Ex 7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a}{k^2+a^2}$.

Ex 8. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, telle que pour tout $a\in\mathbb{R}$, la fonction $f_a:t\mapsto \mathrm{e}^{at}f(t)$ soit λ-intégrable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que

$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{zt}f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\int_{\mathbb{R}}t^k f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t).$$

2) Qu'en déduit-on pour la fonction de z définie par le premier membre de cette égalité ?

Ex 9. *Intégrale fonction de sa borne supérieure*

Soit f une application Lebesgue-intégrable sur un intervalle $[a, b]$. On pose, pour tout $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$. Montrer que F est continue et que F est dérivable en tout point où f est continue.

Ex 10. On pose

$$f(x) := \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1) Vérifier que l'on définit ainsi la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'. En déduire une expression simple de f.

Ex 11. Soit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, λ-intégrable sur $[0, 1]$. On pose

$$f(x) := \int_{[0,1]} |\varphi(t) - x|\,\mathrm{d}\lambda(t).$$

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda(\{\varphi = x_0\}) = 0$, alors f est dérivable au point x_0.

Ex 12. *Fonction Gamma*

On pose pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la fonction Γ est continue, de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Calculer les dérivées successives $\Gamma^{(n)}$ de Γ.

2) Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

3) Soient a et s deux réels strictement positifs. Calculer $A := \int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$. Montrer que pour $s > 1$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 1} \Gamma(s) n^{-s}$.

4) Exprimer $A_n := \int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ à partir de la fonction Γ. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos at$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos at\,\mathrm{d}t$ à partir de $\Gamma(n + 1/2)$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos at\,\mathrm{d}t$.

5) Autre méthode : On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n(t) := \mathrm{e}^{-t^2/2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^{2k}t^{2k}}{(2k)!}.$$

Quelle est la limite de la suite f_n quand n tend vers l'infini ? Par application du théorème de Lebesgue, retrouver l'intégrale précédente.