Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Fiche n° 4

Ex 1. *Intégration par rapport à une probabilité conditionnelle*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ une espace probabilisé et $B \in \mathcal{F}$ un évènement de probabilité non nulle. On note P_B la mesure $\mathbf{P}(. \mid B)$. Vérifier que P_B a une densité par rapport à $\mathbf{P}$. Si X est une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, exprimer son espérance sous P_B comme une espérance sous $\mathbf{P}$.

Ex 2. *Loi uniforme sur un borélien*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ une espace probabilisé, et B un borélien de $\mathbb{R}^d$ tel que $0 < \lambda_d(B) < +\infty$, λ_d désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire. On dit qu'il suit la loi uniforme sur B si sa loi P_X a une densité de la forme $c\mathbf{1}_B$ par rapport à λ_d (notation $X \sim \text{Unif}(B)$).

1) Si X suit la loi uniforme sur B, quelle est l'unique valeur possible de la constante c ? Montrer l'équivalence

$$X \sim \text{Unif}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \text{Bor}(\mathbb{R}^d),\ \mathbf{P}(X \in A) = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(B)}.$$

Ceci permet d'identifier la loi de X comme le conditionnement par B de la mesure λ_d (au sens de l'exemple 4 du chapitre 1).

2) Dans cette question et la suivante, $d = 2$ et on note X_1 et X_2 les variables aléatoires réelles composantes du vecteur aléatoire X de loi uniforme sur B. On prend $B = [a, b] \times [c, d]$, vérifier que X_1 et X_2 suivent des lois uniformes (à préciser) sur des boréliens de $\mathbb{R}$.

3) On prend pour B le disque unité : $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Montrer que cette fois X_1 ne suit pas la loi uniforme sur $[-1, 1]$ (projection de B sur l'axe des abscisses). *Indication :* en vous inspirant d'un dessin, montrer que $\mathbf{P}(1/2 < X_1 \leq 1) < 1/4$.

Ex 3. *Loi uniforme et algorithme du rejet*

Voici une description informelle de l'algorithme du rejet utilisé pour la simulation d'un vecteur aléatoire de loi uniforme sur un borélien B de $\mathbb{R}^d$. On suppose que l'on sait générer une suite de vecteurs aléatoires $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ indépendants et de même loi uniforme sur un borélien C contenant B. C'est le cas notamment si B est borné en prenant pour C un pavé. On assimilera pour la commodité du langage le vecteur $M_k(\omega)$ à un point de

$\mathbb{R}^d$. On obtient ainsi une suite $(M_k(\omega))$ de points de C. Partant de $k=1$, tant que $M_k(\omega)$ n'appartient pas à B, on le rejette et on passe à $M_{k+1}(\omega)$. On garde le premier point de cette suite qui appartienne à B. Le point aléatoire ainsi obtenu suit la loi uniforme sur B. Le but de cet exercice est de justifier mathématiquemeent cet algorithme.

Concernant l'indépendance de la suite de vecteurs dont l'étude systématique n'a pas encore été vue en cours, il suffit de savoir qu'elle signifie que pour toute partie finie I de $\mathbb{N}^*$ et toute famille $(A_i;\ i \in I)$ de boréliens de $\mathbb{R}^d$, les évènements $\{X_i \in A_i\}$, $i \in I$ sont mutuellement indépendants au sens du cours de DEUG. On suppose donc que B et C sont deux boréliens tels que $B \subset C$ et $0 < \lambda_d(B) < \lambda_d(C) < +\infty$ et que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de vecteurs aléatoires $\Omega \to \mathbb{R}^d$, indépendants et de même loi uniforme sur C.

1) Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$T(\omega) := \inf\{i \in \mathbb{N}^*;\ M_i(\omega) \in B\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. T est donc le numéro du premier point « tombé » dans B. Montrer que T est une variable aléatoire discrète positive et donner sa loi.

2) On définit $M_T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ par

$$M_T(\omega) := \begin{cases} M_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } T(\omega) < +\infty, \\ 0 & \text{si } T(\omega) = +\infty, \end{cases}$$

Montrer que M_T est bien un vecteur aléatoire (Attention, M_T n'est pas l'un des vecteurs aléatoires M_k, il est doublement aléatoire...).

3) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$, calculer $\mathbf{P}(M_k \in A \cap B \mid T = k)$.

4) Prouver que $\mathbf{P}(M_T \in A) = \mathbf{P}(M_1 \in A \mid M_1 \in B)$ et en déduire la loi de M_T. *Indication :* $\mathbf{P}(M_T \in A) = \mathbf{P}(M_T \in A \cap B \text{ et } T < +\infty)$. Calculer cette probabilité en conditionnant par les évènements $\{T = k\}$.

5) Que vaut l'espérance de T ? Comment a-t-on intérêt à choisir C si l'on est soucieux du coût de l'algorithme ? Pour fixer les idées, on prendra $d = 2$, B le disque unité et C un rectangle à côtés parallèles aux axes.

Ex 4. *Identification de mesures finies*

Soit $\mathcal{C}_b$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbf{R}$. Soient μ et ν deux mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Montrer que si pour toute f de $\mathcal{C}_b$, $\int_\mathbb{R} f \,\mathrm{d}\mu = \int_\mathbb{R} f \,\mathrm{d}\nu$, alors $\mu = \nu$. *Indication :* interpréter toute fonction indicatrice d'un intervalle ouvert comme limite d'une suite croissante de fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

Ex 5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{M}_+$ (notations du cours) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq C < +\infty,$$

pour une certaine constante C. On suppose de plus qu'une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge sur Ω vers une fonction f. Montrer que $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq C$.

Ex 6. *Mesure de Lebesgue et théorème de transfert*

On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $\lambda = \lambda_1$. Les changements de variable de cet exercice devront être justifiés directement à partir du théorème de transfert.

1) Montrer que si f est λ_d-intégrable sur $\mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

2) Si f est λ intégrable sur $\mathbb{R}$, exprimer $\int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda$, $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ étant des constantes. Traiter aussi le cas $a < 0$.

3) Soit f λ-intégrable sur $\mathbb{R}$ et $c > 0$. Montrer que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\Big(\frac{x}{c} + k\Big)$$

est absolument convergente (ce qui justifie *a posteriori* la façon d'écrire l'indexation). Montrer que la fonction F égale à la somme de cette série là où elle est absolument convergente et à 0 ailleurs est périodique de période c et λ-intégrable sur $]0, c[$. *Indication :* commencer par établir la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(x/c + k)|\,\mathrm{d}\lambda(x)$.

Ex 7. *Variations sur l'inégalité de Markov*

Soit X une variable aléatoire positive définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1) On suppose que $\mathbf{E}Y < +\infty$. Montrer $\mathbf{P}(Y > t) = o(t^{-1})$ quand t tend vers $+\infty$.

2) Si pour un réel $\alpha > 0$, $\mathbf{E}(Y^\alpha) < +\infty$, que peut-on dire de la vitesse de convergence vers 0 de $\mathbf{P}(Y > t)$ quand t tend vers $+\infty$? Même question si $\mathbf{E}\exp(\alpha Y) < +\infty$.

Ex 8. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathcal{M}_+$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu \leq M < +\infty.$$

Montrer que $\big(f_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Ex 9. *Théorème de convergence décroissante*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que f_1 soit μ-intégrable. Montrer que (f_n) converge simplement vers f, que f est intégrable et que $\lim\limits_n \int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu$.

Trouver un contre-exemple dans le cas où l'on omet la condition f_1 μ-intégrable.

Ex 10. *Interversion limite intégrale et convergence uniforme*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications intégrables de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ où μ est une mesure *finie*.

1) Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur Ω, alors f est intégrable et $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$.

2) Le résultat subsiste-t-il si μ n'est plus supposée finie ?

Ex 11. *Caractérisations de l'intégrabilité*

Soit μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ une application finie μ-presque partout. Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est μ-intégrable

b) $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|f|>n\}} |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$

c) $\sum\limits_{n\geq 1} n\mu\{n < |f| \leq n+1\} < +\infty$

d) $\sum\limits_{n\geq 0} \mu\{|f| > n\} < +\infty$.

Ex 12.

Pourquoi la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est-elle pas Riemann intégrable sur $[0,1]$, mais Lebesgue intégrable ?

Ex 13.

Soit (f_n) la suite de fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = k2^{-n}, \text{ où } k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq 2^n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout n, f_n est intégrable au sens de Riemann et calculer son intégrale (de Riemann).

2) Montrer que la suite f_n est bornée par une fonction intégrable au sens de Riemann et que f_n converge simplement vers une fonction f *non intégrable* au sens de Riemann. Conclusion ?