Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-2003**

Fiche n° 3

Ex 1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) := x^2$.

1) Montrer que $f^{-1}(\mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ est égale à $\mathcal{S} := \{A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) / A = -A\}$.
2) Déterminer les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$.

Ex 2. Montrer que toute fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

Ex 3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}))$. Montrer que l'ensemble

$$C := \{\omega \in \Omega / \lim_n f_n(\omega) \text{ existe dans } \overline{\mathbb{R}}\}$$

est mesurable (*i.e.* que $C \in \mathcal{F}$).

Ex 4. Soit f une fonction mesurable positive de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned} A_{n,k} &:= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\right), \quad 0 \leq k \leq n^2 - 1, \\ A_{n,n^2} &:= f^{-1}\left([n, +\infty]\right), \\ f_n &:= \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \mathbf{1}_{A_{n,k}}. \end{aligned}$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables, et étudier sa limite au sens de la convergence simple.
2) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est-elle croissante ?

Ex 5. *Lemme de Doob*

Soient f et g deux applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$. Montrer que g est $f^{-1}(\mathcal{B})$-mesurable si et seulement si il existe une application borélienne $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g = u \circ f$.

Indication : pour construire u on commencera par le cas où $g = \mathbf{1}_A$ ($A \in \mathcal{F}$), puis on passera au cas g étagée, puis par limite croissante au cas g mesurable positive, et enfin au cas g mesurable quelconque.

Ex 6. Soit f une fonction mesurable positive de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+))$. On suppose que $\mu(\{f = +\infty\}) > 0$. Montrer que $\int_\Omega f d\mu = +\infty$.

Ex 7. *Intégration sur un sous-ensemble de* Ω

Nous notons $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des applications $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $\mathcal{E}_+$, l'ensemble des fonctions étagées mesurables positives. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Dans le cours, on appelle intégrale sur Ω de f par rapport à μ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ noté $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ et défini par

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu;\ u \in \mathcal{E}_+,\ u \leq f \right\}. \tag{1}$$

Pour $A \in \mathcal{F}$, $f\mathbf{1}_A$ appartient encore à $\mathcal{M}_+$ et on définit aussi

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

La définition de $\int_A f \,\mathrm{d}\mu$ pose un problème de cohérence car on pourrait considérer A muni de la tribu trace de $\mathcal{F}$ et de la restriction de μ comme un espace mesuré et lui appliquer la définition (1). Le but de cet exercice est de clarifier cette question. On note $\mathcal{F}_A := \{A \cap B;\ B \in \mathcal{F}\}$.

1) Vérifier que $\mathcal{F}_A$ est une tribu sur A (tribu trace). Par construction $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}$, donc la restriction μ_A de μ à $\mathcal{F}_A$ est bien définie (noter que $\mathcal{F}_A$ n'est pas une *sous-tribu* de $\mathcal{F}$). Vérifier que μ_A est une mesure sur $(A, \mathcal{F}_A)$.

2) Montrer que pour toute $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{F})$, sa restriction f_A à A appartient à $\mathcal{M}_+(\mathcal{F}_A)$ et que

$$\int_A f_A \,\mathrm{d}\mu_A = \int_\Omega f\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu,$$

la première intégrale étant comprise au sens de (1), appliquée à l'espace mesuré $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$.

Ex 8. *Calcul d'une intégrale par les fonctions étagées*

On munit l'espace $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_2. On considère la fonction borélienne définie sur Ω par $h(x, y) = (x + y)^2$.

1) Construire une suite croissante (h_n) de fonctions étagées qui converge vers h.

2) Calculer $\int_\Omega h_n \,d\lambda_2$.

3) En déduire la valeur de $\int_\Omega h \,d\lambda_2$.

Ex 9. On note $[x]$ la partie entière du réel x. Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour fonction de répartition F :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1) Calculer :

$$P\Big(k \le \frac{1}{X} \le k+t\Big) \qquad k \in \mathbb{N}^*,\ t \in]0,1[.$$

2) Soit $Y = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle de même loi que X.

Ex 10. Soit F une fonction de répartition. On définit sur $]0,1[$ son *inverse généralisée* F^{-1} par

$$F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\}, \quad u \in]0,1[.$$

1) Pourquoi a-t-on exclu les cas particuliers $u = 0$ et $u = 1$ de la définition ci-dessus ? Que peut-on dire des limites de F^{-1} en 0 et en 1 ?

2) Pour $u \in]0,1[$, on pose $I_u := \{x \in \mathbb{R};\ F(x) = u\}$. Montrer que I_u est soit un intervalle fermé à gauche, soit l'ensemble vide.

3) Donner la construction graphique de $F^{-1}(u)$ dans chacun des cas possibles pour I_u : $I_u = \emptyset$, $I_u = \{x_0\}$, $I_u = [x_0, x_1[$, $I_u = [x_0, x_1]$.

4) Représenter F^{-1} lorsque F est en escaliers.

5) Montrer que les inégalités $F^{-1}(u) \le x$ et $u \le F(x)$ sont équivalentes en justifiant chacune des implications ci-dessous. Dans un sens,

$$u \le F(x) \Rightarrow F^{-1}(u) \le x.$$

Dans l'autre sens,

$$F^{-1}(u) \le x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, F(x+\varepsilon) \ge u \Rightarrow F(x) \ge u.$$

6) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que X et $F^{-1}(U)$ ont même loi.

7) Le résultat précédent permet de ramener la *simulation* informatique d'une variable aléatoire X de loi donnée à celle d'une variable U de loi uniforme (à condition que l'on dispose d'un bon algorithme de calcul de F^{-1}). Les générateurs de nombres aléatoires fournissent tous la simulation de U. Expliquer comment simuler un variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre a à partir du générateur de la loi uniforme.

Ex 11. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et Y la variable aléatoire définie sur le même espace Ω par

$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in [0,1/4] \cup [3/4,1]; \\ 1 - X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

Quelle est la loi de Y ? Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := X + Y$ et vérifier que Z n'est ni discrète ni à densité.

Ex 12. *La loi multinomiale*

1) Montrer que le nombre N de façons de répartir une population de n individus en k groupes d'effectifs respectifs $n_1, \ldots, n_k$ où $n_1 + \cdots + n_k = n$ est :

$$N = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}.$$

2) En déduire la formule du multinôme : $\forall (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$:

$$(a_1 + \cdots + a_k)^n = \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}.$$

Indication : Considérer le premier membre comme un produit de n facteurs et examiner la forme générale d'un terme du développement de ce produit.

3) Soient $p_1, \ldots, p_k$ des réels positifs tels que $p_1 + \cdots + p_k = 1$.

a) Montrer que l'on définit bien une loi de probabilité sur $\mathbf{N}^k$ en posant :

$$P(\{(n_1, \ldots, n_k)\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n_1 + \cdots + n_k \neq n, \\ \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k} & \text{si } n_1 + \cdots + n_k = n. \end{cases}$$

On dit que P est la loi multinomiale de paramètres $(n, p_1, \ldots, p_k)$.

b) Soit $X = (X_1, \ldots, X_k)$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbf{N}^k$, suivant la loi multinomiale P définie ci-dessus. Montrer que X_i suit la loi binomiale de paramètres n, p_i.

c) Montrer que $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres $n, (p_1 + p_2)$. Généraliser au cas de : $Y = \sum_{i \in I} X_i$ où I est une partie non vide de $\{1, \ldots, k\}$.

d) On effectue une série de n épreuves répétées dans des conditions identiques avec pour chacune d'elles k résultats possibles de probabilités respectives $p_1, \ldots, p_k$. On note X_l le nombre total de résultats du type $l, (1 \leq l \leq k)$. Quelle est la loi de $(X_1, \ldots, X_k)$?

4) On lance $6n$ fois un dé, quelle est la probabilité d'obtenir exactement n fois chacune des faces ? Majorer cette probabilité à l'aide de la formule de Stirling :

$$\forall n \geq 1, \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \mathrm{e}^{\theta_n}, \qquad \frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

Application numérique : $n = 100$.