Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-2003**

Fiche 2

Ex 1. *Tribu engendrée par une partition*

1) Soit I un ensemble d'indices fini ou dénombrable et $\Pi = \{A_i;\, i \in I\}$ une *partition* de l'ensemble Ω. En adoptant la convention qu'une union indexée par $\emptyset$ est elle même vide, démontrer que la tribu sur Ω engendrée par Π est

$$\sigma(\Pi) = \Big\{ \underset{i\in J}{\cup} A_i;\ J \subset I \Big\}.$$

2) On prend désormais $\Omega = [0,1[^2$ et pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par la partition

$$\Pi_n = \left\{ \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[\times \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right[;\ 1 \leq i,j \leq n \right\}.$$

Vérifier que $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de tribus.

3) Ainsi pour tout n, $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \mathcal{F}_i$ est une tribu. Peut-on en dire autant de $\mathcal{G} = \underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} \mathcal{F}_i$?
Indication : $[0,1/3[^2 \notin \mathcal{G}$

4) Soit $D = \{(x,y) \in \Omega;\ x^2 + y^2 < 1\}$. Montrer que D est dans $\sigma(\mathcal{G})$.

Ex 2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathcal{T}$ la classe des parties $\mathcal{A}$-mesurables de Ω qui sont μ-négligeables ou dont le complémentaire est μ-négligeable.

1) Démontrer que $\mathcal{T}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

2) Démontrer qu'une application f de Ω dans $\mathbb{R}$ est $\big(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable (c'est à dire telle que $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{T}$) si et seulement si elle est μ-presque partout constante.

Ex 3. 1) Soit P une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ne prenant que les valeurs 0 et 1. Démontrer que c'est une mesure de Dirac. *Indication* : On montrera qu'il existe un unique entier n tel que $P\big(]n, n+1]\big) = 1$, puis une suite décroissante de sous-intervalles emboîtés de $]n, n+1]$ de probabilité 1, dont la longueur tend vers 0.

2) Étendre ce résultat aux espaces métriques *séparables* munis de leur tribu borélienne (facultatif).

Ex 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Démontrer que

$$\mathcal{C} = \{A\ ;\ A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < +\infty\}$$

est un π-système engendrant la tribu $\mathcal{A}$ si la mesure μ est σ-finie.

Ex 5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une mesure finie m sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est absolument continue par rapport à μ ($m \preceq \mu$) si pour toute partie $\mathcal{A}$-mesurable A de Ω, $\mu(A) = 0$ implique $m(A) = 0$. On dit qu'elle est singulière par rapport à μ ($m \perp \mu$) s'il existe une partie $\mathcal{A}$-mesurable E de Ω telle que $\mu(E) = 0$ et $m(\Omega \setminus E) = 0$. Soit ν une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1) Démontrer qu'il existe une partie $\mathcal{A}$-mesurable E de Ω telle que

$$\nu(E) = \max\big\{\nu(A)\,;\ A \in \mathcal{A}\,,\ \mu(A) = 0\big\}.$$

2) Démontrer que les mesures ν_c et ν_s définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par $\nu_c(A) = \nu(A \setminus E)$ et $\nu_s(A) = \nu(A \cap E)$ sont respectivement absolument continue et singulière par rapport à μ et que $\nu = \nu_c + \nu_s$.

3) Démontrer que la décomposition de ν comme somme d'une mesure absolument continue et d'une mesure singulière par rapport à μ est unique. *Indication* : $\mu = \nu'_c + \nu'_s$ désignant une décomposition du type précédent, il existe une partie $\mathcal{A}$-mesurable E' de Ω telle que $\mu(E') = \nu'_s(\Omega \setminus E') = 0$. On démontrera d'abord que $\nu(E \Delta E') = 0$.

Ex 6. Donner une partition $(B_n,\ n \geq 1)$ de $\mathbb{R}$ formée de boréliens de mesure de Lebesgue infinie.

Ex 7. Démontrer que $\lambda\Big(\big(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[n^3 - 5^{-n}, n^3 + 5^{-n}]\big) \cap \big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big)\Big) = \dfrac{1}{2}$

Ex 8. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue > 0.

1) Démontrer que B contient au moins deux points x et y tels que $|x - y|$ soit irrationnel.

2) Démontrer que si B est borné, il contient au moins deux points distincts u et v tels que $|u - v|$ soit rationnel. Étendre ce résultat au cas non borné.

Ex 9. Appelons développement décimal de tout nombre x de [0,1[l'unique représentation de x sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

où $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$, $n \geq 1$, et où $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n < 9$. Quelle est la mesure de Lebesgue de l'ensemble E des éléments de $[0, 1[$ dont le développement décimal s'écrit sans le chiffre 7 ? de l'ensemble F des éléments dont le développement décimal ne peut s'écrire sans le chiffre 7 ?

Ex 10. On considère l'intervalle $[0,1]$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}([0,1])$ et de la mesure de Lebesgue λ.

1) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert O dense dans $[0,1]$ et de mesure $\lambda(O) < \varepsilon$.

2) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F d'intérieur vide et de mesure $\lambda(F) \geq 1 - \varepsilon$.

3) Existe-t-il un fermé d'intérieur vide et de mesure 1 ? (facultatif)

Ex 11. *Aires de courbes*

1) Démontrer que la mesure de Lebesgue λ_2 d'un segment quelconque de $\mathbb{R}^2$ est nulle en utilisant un recouvrement par de petits pavés. En déduire que l'aire de toute droite est de mesure λ_2 nulle.

2) Soit f est une fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$ hölderienne d'exposant α $(0 < \alpha \leq 1)$, ce qui signifie qu'il existe une constante C telle que

$$\forall s,t \in [0,1], \quad |f(t) - f(s)| \leq C|t-s|^\alpha.$$

En utilisant la même méthode de recouvrement que précédemment, démontrer que son graphe

$$G(f) = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R};\ y = f(x)\}$$

est de mesure λ_2 nulle. En déduire de nouveau que la mesure λ_2 de toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est nulle.

Ex 12. Soit λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

1) Démontrer que λ_2 est invariante par translation, par symétrie par rapport à la droite $x'x$ et par symétrie par rapport à l'origine.

2) Démontrer que la mesure d'un segment est nulle.

3) Calculer la mesure d'un triangle rectangle ayant 2 côtés parallèles aux axes, puis de tout triangle rectangle.

4) Calculer la mesure d'un rectangle quelconque.

5) Démontrer que λ_2 est invariante par isométrie.

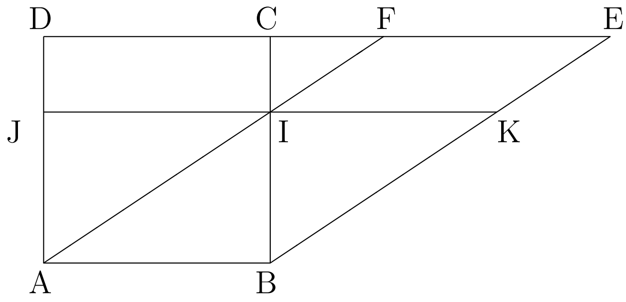
Ex 13. *Euclide et l'aire d'un parallélogramme*
Dans le *Livre I* des *Éléments* d'Euclide, on trouve la proposition suivante :

> « Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux[1]. »

Ici *égaux entre eux* signifie *de même aire*. Le but de cet exercice est de retrouver cette proposition avec la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ et d'en déduire la formule donnant l'aire d'un parallélogramme.

[1]cf. J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu. Épistomologie et histoire.*, CEDIC/NATHAN 1978, p. 73.

1) En utilisant l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, démontrer que les parallélogrammes $ABCD$ et $ABEF$ (cf. figure ci-dessous) ont même mesure de Lebesgue. *Indication* : On comparera d'abord les parallélogrammes $ABIJ$ et $ABKI$.



2) En déduire l'aire du parallélogramme $ABEF$ en fonction des longueurs de ses côtés et de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$. On considèrera comme acquis dans cet exercice que la mesure de Lebesgue d'un rectangle de $\mathbb{R}^2$ est égale au produit longueur par largeur, qu'il soit ou non à côtés parallèles aux axes (voir l'exercice précédent).

Ex 14. *Volumes de simplexes*
Soit λ_3 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$ et posons

$$T_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < x < y < z < 1\}.$$

1) Démontrer que la mesure de $\{(x, y, z) \in]0, 1[^3;\ x = y\}$ est nulle.
2) Calculer $\lambda_3(T_3)$.
3) Reprendre l'exercice en dimension $d \geq 3$.
4) Si a et b sont deux réels ($a \leq b$), on note

$$T_d(a, b) = \{(x_1, \dots, x_d);\ a < x_1 < x_2 < \dots < x_d < b\}.$$

Calculer $\lambda_d\big(T_d(a, b)\big)$.

Ex 15. *Aires de courbes (suite)*
Soit f une fonction *bornée* $[a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que le graphe $G(f)$ est un *borélien* de $\mathbb{R}^2$.

1) Démontrer que $\lambda_2\big(G(f)\big) = 0$. *Indication* : considérer la suite des translatés $G_n = G(f + 1/n)$ et majorer la mesure de leur réunion.
2) Comparer la généralité de ce résultat avec celui de l'exercice 11.

Ex 16. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une application mesurable f de Ω dans Ω conserve la mesure μ si

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Considérons l'application (la transformation du boulanger) $t : [0, 1[\longrightarrow [0, 1[$ définie par

$$t(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}[}(x) + (2x - 1)\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1[}(x).$$

1) Démontrer que t est une application conservant la mesure de l'espace de probabilité standard $\big([0,1[,\ \mathcal{B}([0,1[),\ \lambda\big)$.

2) On sait que tout nombre x de $[0,1[$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}$ où $(x_n,\ n \geq 1) \subseteq \{0,1\}$ et où $\liminf_{n\to+\infty} x_n = 0$ (développement dyadique de x). On écrit alors x sous la forme $0, x_1x_2\ldots$ Démontrer que $t(x) = 0, x_2x_3\ldots$

3) À partir de t, construire une application T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui conserve la mesure de $\big(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda\big)$.

Ex 17. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une application mesurable f de Ω dans Ω conserve la mesure μ si

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Soit α un nombre réel. Démontrer que l'application t de $[0,1[$ dans lui-même définie par $t(x) = (x+\alpha) - [x+\alpha]$ conserve la mesure λ, ce qui signifie que si on identifie $[0,1[$ au cercle-unité, la longueur des arcs est invariante par rotation.

Ex 18. Soient $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2$, des fonctions numériques mesurables. Montrer que si $f_1 = g_1$ μ-p.p. et $f_2 = g_2$ μ-p.p., alors $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ μ-p.p.

Ex 19. Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ qui vérifient, pour tout n de $\mathbf{N}$, $f_n = g_n$ μ-p.p. On pose $f = \sup_n f_n$ et $g = \sup_n g_n$. A-t-on $f = g$ μ-p.p. ?

Ex 20. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions *continues* sur $[0,1]$ nulles λ-p.p. sur $]0,1[$. Le résultat subsiste-t-il si on remplace *continues* par *boréliennes* ?

Ex 21. Comparer l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues λ-p.p. et l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égales λ-p.p. à une fonction continue.

Ex 22. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n,\ n \geq 1)$ une suite de parties $\mathcal{A}$-mesurables de Ω.

1) Démontrer que $\mathbf{1}_{\limsup_{n\to+\infty} A_n} = \limsup_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n}$ et $\mathbf{1}_{\liminf_{n\to+\infty} A_n} = \liminf_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n}$.

2) En déduire que $\mathbf{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu-p.p.} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu\big(\limsup_{n\to+\infty} A_n\big) = 0.$