

Corrigé de l'examen du 4 septembre 2002

Exercice I

1) Calcul de l'intégrale $I := \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$.

Il s'agit de l'intégrale de Riemann généralisée d'une fonction continue positive sur \mathbb{R} . La convergence en $+\infty$ est immédiate par comparaison avec $\exp(-x)$ dont on sait calculer une primitive : pour $x \geq 1$, $x^2 \geq x$, d'où $0 \leq \exp(-x^2) \leq \exp(-x)$; de plus

$$\int_1^b \exp(-x) dx = e^{-1} - e^{-b} \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} e^{-1} < +\infty.$$

La convergence en $-\infty$ s'en déduit immédiatement par parité de $\exp(-x^2)$. Ainsi I est l'intégrale de Riemann généralisée absolument convergente d'une fonction continue sur \mathbb{R} , on peut donc aussi la considérer comme une intégrale de Lebesgue et écrire

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) d\lambda_1(x).$$

En appliquant le corollaire du théorème de Tonelli pour les fonctions mesurables positives du type $f \otimes g$ et en rappelant que $\lambda_1 \otimes \lambda_1 = \lambda_2$, on obtient

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) d\lambda_1(x) \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) d\lambda_1(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2) \exp(-y^2) d\lambda_2(x, y),$$

d'où

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) d\lambda_2(x, y).$$

On calcule cette intégrale par passage en coordonnées polaires en considérant le C^1 -difféomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \longrightarrow]0, +\infty[\times]0, 2\pi[,$$

dont l'inverse est donné par

$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[, \quad \varphi^{-1}(r, \theta) = (x, y) \text{ avec } \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Rappelons le calcul (bien connu) du jacobien de φ^{-1} :

$$\text{Jac}(\varphi^{-1})(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

On a alors successivement :

$$I^2 = \int_{]0, +\infty[\times]0, 2\pi[} \exp(-r^2) r \, d\lambda_2(r, \theta) \quad (1)$$

$$= \int_{]0, +\infty[} \exp(-r^2) r \, d\lambda_1(r) \int_{]0, 2\pi[} d\lambda_1(\theta) \quad (2)$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \exp(-r^2) r \, dr \quad (3)$$

$$= \pi \int_0^{+\infty} \exp(-t) \, dt = \pi. \quad (4)$$

Justifications : L'égalité (1) provient du théorème de changement de variable pour une intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . On obtient (2) par une nouvelle application du corollaire du théorème de Tonelli pour les fonctions $f \otimes g$ avec $f(r) = r \exp(-r^2)$, $g(\theta) = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$. Pour passer à (3), on utilise $\lambda_1(]0, 2\pi[) = 2\pi$ et le fait que f étant continue et d'intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur $]0, +\infty[$, son intégrale de Lebesgue et son intégrale de Riemann coïncident. Enfin le changement de variable $t = r^2$ et le calcul explicite de l'intégrale généralisée nous donnent (4).

Nous avons donc montré que

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \, d\lambda_1(x) = \sqrt{\pi}. \quad (5)$$

2) Soit α un réel, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_\alpha(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-k^\alpha x^2)$. Considérons la suite de fonctions $(F_{\alpha,n})_{n \geq 1}$ définies par

$$F_{\alpha,n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto F_{\alpha,n}(x) := \sum_{k=1}^n \exp(-k^\alpha x^2).$$

Ces fonctions $F_{\alpha,n}$ sont continues, donc $\text{Bor}(\mathbb{R}) - \text{Bor}(\mathbb{R}_+)$ mesurables. Elles sont aussi $\text{Bor}(\mathbb{R}) - \text{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurables, car tout borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est soit un borélien de \mathbb{R}_+ , soit s'écrit $B' = B \cup \{+\infty\}$ où $B \in \text{Bor}(\mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, $F_{\alpha,n}^{-1}(B') = F_{\alpha,n}^{-1}(B) \in \text{Bor}(\mathbb{R})$.

En raison de la positivité des exponentielles, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_{\alpha,n}(x)$ converge en croissant dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers $F_\alpha(x)$. On en déduit que F_α est $\text{Bor}(\mathbb{R}) - \text{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurable, comme limite d'une suite de fonctions $\text{Bor}(\mathbb{R}) - \text{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurables (ou comme le supremum de cette suite).

3) La fonction F_α étant mesurable positive sera λ_1 -intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} F_\alpha \, d\lambda_1 < +\infty. \quad (6)$$

Or par le corollaire du théorème de Beppo-Levi pour les séries,

$$\int_{\mathbb{R}} F_\alpha \, d\lambda_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp(-k^\alpha x^2) \, d\lambda_1(x). \quad (7)$$

Le terme général de cette série se ramène à l'intégrale I par le changement de variable $y = k^{\alpha/2}x$:

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-k^{\alpha}x^2) d\lambda_1(x) = k^{-\alpha/2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) d\lambda_1(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{k^{\alpha/2}}.$$

Ainsi (6) est vérifiée si et seulement si la série de terme général $\sqrt{\pi}k^{-\alpha/2}$ converge. L'ensemble des valeurs de α telles que F_{α} soit λ_1 -intégrable sur \mathbb{R} est donc $]2, +\infty[$.

4) Pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \neq 0$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^{\alpha}x^2}{2 \ln k} = +\infty.$$

Par conséquent il existe $k_0 = k_0(\alpha, x)$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $k^{\alpha}x^2 \geq 2 \ln k$, d'où

$$\forall k \geq k_0, \quad 0 < \exp(-k^{\alpha}x^2) \leq \exp(-2 \ln k) = \frac{1}{k^2}.$$

Donc la série définissant $F_{\alpha}(x)$ converge dans \mathbb{R} (cette question n'a rien à voir avec la théorie de l'intégration).

Exercice II

1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $X := \ln U$. La fonction de répartition G de U est

$$G(y) = \mathbf{P}(U \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \\ y & \text{si } 0 < y \leq 1, \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la fonction de répartition de X :

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(\ln U \leq x) = \mathbf{P}(U \leq e^x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ e^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En particulier, on constate (comme c'était prévisible) que $\mathbf{P}(X > 0) = 1 - F(0) = 0$. La loi de X a donc toute sa masse sur \mathbb{R}^- . Pour trouver la densité de X (si elle existe), on essaie d'écrire $\mathbf{P}(a < X \leq b)$ sous la forme d'une intégrale par rapport à λ_1 . On voit immédiatement que

$$\forall a < b \leq 0, \quad \mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = e^b - e^a = \int_a^b e^t dt = \int_{]a,b]} e^t d\lambda_1(t).$$

Si $a < 0 \leq b$, $\mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq 0) = \int_{]a,0]} e^t d\lambda_1(t)$. Si $0 \leq a < b$, $\mathbf{P}(a < X \leq b) = 0$. Ainsi pour tout intervalle $]a, b]$, $\mathbf{P}(a < X \leq b) = \int_{]a,b]} f d\lambda_1$, en définissant f par :

$$f(t) := e^t \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La mesure P_X (loi de X) et la mesure de densité f par rapport à λ_1 , coïncident sur la classe des intervalles $]a, b]$, donc les deux mesures sont égales sur toute la tribu borélienne de \mathbb{R} , par une application classique du théorème d'unicité. Ainsi X a pour densité f . L'espérance $\mathbf{E}X$ existe si $\mathbf{E}|X| < +\infty$. En utilisant la coïncidence des intégrales de Lebesgue et de Riemann pour une fonction continue d'intégrale généralisée absolument convergente, on obtient

$$\mathbf{E}|X| = \int_{\mathbb{R}} |x|f(x) d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}^-} |x|e^x d\lambda_1(x) = - \int_{-\infty}^0 xe^{-x} dx = 1 < +\infty.$$

Le calcul de la dernière intégrale est classique (intégrer par parties). Ainsi $\mathbf{E}X$ existe et une adaptation immédiate du calcul ci-dessus (sur \mathbb{R}^- , $x = -|x|$) nous donne

$$\mathbf{E}X = \int_{\mathbb{R}} xf(x) d\lambda_1(x) = -1.$$

2) Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $T_n := (U_1 U_2 \dots U_n)^{1/n}$. Posons $X_k = \ln U_k$. Les X_k forment une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. De plus elles sont \mathbf{P} -intégrables et la valeur commune de leur espérance est $\mathbf{E}X_k = -1$. En appliquant la loi forte des grands nombres (cas i.i.d.) à cette suite, on obtient

$$\ln T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}X_1 = -1.$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit :

$$T_n = \exp(\ln T_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} e^{-1}.$$

3) Soit $\Omega' = \{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\omega) = e^{-1}\}$. On sait que $\Omega' \in \mathcal{F}$ et que $\mathbf{P}(\Omega') = 1$. D'autre part $e^{-1} < 1$, donc on peut choisir q tel que $e^{-1} < q < 1$ ($q = 1/2$ fait l'affaire). Il résulte alors de la convergence de T_n sur Ω' que pour tout $\omega \in \Omega'$, il existe un entier $n_0(\omega)$ tel que

$$\forall n \geq n_0(\omega), \quad 0 < T_n(\omega) < q \quad \text{d'où} \quad 0 < U_1(\omega)U_2(\omega) \dots U_n(\omega) \leq q^n.$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_1 U_2 \dots U_n$ converge sur Ω' par comparaison avec la série géométrique de raison q (avec $0 < q < 1$). Comme $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, on a établi la convergence presque-sûre.

4) Soit S la somme de cette série. Par le théorème de Beppo-Levi pour les séries de fonctions mesurables positives, on a l'égalité suivante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\mathbf{E}S = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(U_1 U_2 \dots U_n). \quad (8)$$

Or les U_k étant des variables aléatoires positives indépendantes, on a

$$\mathbf{E}(U_1 U_2 \dots U_n) = (\mathbf{E}U_1)(\mathbf{E}U_2) \dots (\mathbf{E}U_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

car l'espérance de la loi uniforme sur $[0, 1]$ est $1/2$. En reportant dans (8), on obtient

$$\mathbf{E}S = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Exercice III

1) Posons pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$,

$$f(x, t) := \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2}$$

L'application partielle $f(x, \cdot)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc mesurable (pour la tribu borélienne de \mathbb{R}_+). De plus on a pour tout $x \geq 0$,

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq f(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2} =: h(t). \quad (9)$$

Or h est λ_1 -intégrable sur $[0, +\infty[$ (fonction continue d'intégrale de Riemann généralisée absolument convergente), donc $f(x, \cdot)$ l'est aussi par majoration.

2) Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$G(x) := \int_{[0, +\infty[} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2} d\lambda_1(t).$$

La continuité de G sur $[0, +\infty[$ résulte immédiatement du théorème de continuité sous le signe somme en prenant pour fonction majorante h (majorant global valable pour tout $x \in [0, +\infty[$).

Pour montrer la dérivabilité sur $]0, +\infty[$, on utilise le théorème de dérivation sous le signe somme avec une majoration *locale* (relativement à x) de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$. Fixons $x_0 > 0$ et définissons le voisinage $V_0 :=]x_0/2, +\infty[$ de x_0 (noter que $x_0/2 > 0$). On a pour tout $x > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2} \right) = \frac{-t^2 \exp(-xt^2)}{1+t^2},$$

d'où

$$\forall x \in V_0, \forall t \in [0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2} \right) \right| \leq \exp\left(-\frac{x_0}{2}t^2\right).$$

Comme $x_0/2 > 0$, la fonction continue $t \mapsto \exp(-x_0 t^2/2)$ a une intégrale généralisée de Riemann absolument convergente sur $[0, +\infty[$, donc est λ_1 -intégrable. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que G est dérivable au point x_0 . Ce raisonnement étant valable pour tout x_0 *strictement positif*, G est en fait dérivable sur $]0, +\infty[$.

3) Calcul de $G(0)$:

$$G(0) = \int_{[0, +\infty[} \frac{1}{1+t^2} d\lambda_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} (\arctan T - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Pour prouver que $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ dans \mathbb{R}_+ , tendant vers $+\infty$, la suite $(G(x_n))_{n \geq 1}$ converge vers 0. Or

$$G(x_n) = \int_{[0, +\infty[} \frac{\exp(-x_n t^2)}{1 + t^2} d\lambda_1(t) = \int_{[0, +\infty[} f(x_n, t) d\lambda_1(t)$$

et sa convergence vers 0 résulte immédiatement du théorème de convergence dominée avec pour fonction majorante $h(t) = (1 + t^2)^{-1}$, en notant que pour tout $t > 0$ (donc λ_1 presque partout sur $[0, +\infty[$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, t) = 0$.

4) Nous avons vu à la question 2) que G vérifiait les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme, on a donc

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad G'(x) = \int_{[0, +\infty[} \frac{-t^2}{1 + t^2} \exp(-xt^2) d\lambda_1(t).$$

On en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} G'(x) - G(x) &= - \int_{[0, +\infty[} \exp(-xt^2) d\lambda_1(t) \\ &= - \int_0^{+\infty} \exp(-xt^2) dt \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du, \end{aligned}$$

la dernière égalité s'obtenant par le changement de variable $u = t\sqrt{x}$ (pour $x > 0$). G est donc bien solution de l'équation différentielle

$$G'(x) - G(x) = \frac{-J}{\sqrt{x}}, \quad x \in]0, +\infty[. \quad (10)$$

5) Posons $H(x) := G(x)e^{-x}$. Comme G , la fonction H est dérivable sur $]0, +\infty[$. En exprimant G' à l'aide de H et H' , on obtient

$$G'(x) - G(x) = H'(x)e^x.$$

Compte-tenu de (10) on en déduit que H est solution de

$$H'(x) = -J \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

La fonction H étant continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, on a pour tout $x > 0$,

$$H(x) - H(0) = \int_0^x H'(t) dt = -J \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = u^2$ et en notant que $H(0) = G(0) = \pi/2$, on obtient

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad H(x) = \frac{\pi}{2} - 2J \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du. \quad (11)$$

6) En raison de la convergence de l'intégrale généralisée définissant J , on déduit de (11)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \frac{\pi}{2} - 2J^2.$$

D'autre part, $G(x)$ convergeant vers zéro en $+\infty$, il en va clairement de même pour $H(x) = G(x)e^{-x}$. L'unicité de la limite impose alors l'égalité $\pi/2 - 2J^2 = 0$, d'où

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Problème

Le but du problème est de montrer que si tous les coefficients de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{T})$ sont nuls, cette fonction est nulle. On rappelle d'abord les notations du cours. m désigne la mesure $\frac{1}{2\pi}\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . On note $C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continues et 2π périodiques. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, telles que $\|f\|_p := \left(\int_{[-\pi, \pi]} |f|^p dm\right)^{1/p} < +\infty$ et $f(t+2\pi) = f(t)$, m -presque partout. $L^p(\mathbb{T})$ est l'espace des classes des éléments de $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ modulo l'égalité m -presque partout. On note $e_k(t) := e^{ikt}$ et on rappelle que la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{T})$. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, ses coefficients de Fourier sont définis par

$$c_k(f) := \int_{[-\pi, \pi]} f(t)e^{-ikt} dm(t), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1) Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, le coefficient de Fourier $c_k(f)$ s'interprète comme le produit scalaire $\langle f, e_k \rangle$. On sait que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. L'identité de Plancherel s'écrit ici :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

La nullité de tous les $c_k(f)$ implique alors $\|f\|_2 = 0$, donc que f est la classe d'équivalence des fonctions nulles presque partout.

Dans la suite, on suppose seulement que $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que $c_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2) Soit h une combinaison linéaire finie des e_k :

$$h = \sum_{j \in J} a_j e_j, \quad \text{avec } J \text{ fini.}$$

Par linéarité de l'intégrale et la relation $\overline{e_k} = e_{-k}$, en notant $-J := \{k \in \mathbb{Z}; -k \in J\}$,

$$\int_{[-\pi, \pi]} fh dm = \sum_{j \in J} a_j \int_{[-\pi, \pi]} f e_j dm = \sum_{k \in -J} a_{-k} \int_{[-\pi, \pi]} f e_{-k} dm = \sum_{k \in -J} a_{-k} \int_{[-\pi, \pi]} f \overline{e_k} dm.$$

Par nullité des $c_k(f)$,

$$\int_{[-\pi, \pi]} fh dm = \sum_{k \in -J} a_{-k} c_k(f) = 0.$$

Soit $g \in C(\mathbb{T})$ et $\sigma_n(g)$ sa n -ième somme de Fejér :

$$\sigma_n(g) = \sum_{k=-n}^{k=n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k(g) e_k.$$

Ces sommes étant des combinaisons linéaires finies des e_k , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{[-\pi, \pi]} f \sigma_n(g) \, dm = 0. \quad (12)$$

D'autre part, le théorème de Fejér nous dit que $\sigma_n(g)$ converge uniformément vers g sur $[-\pi, \pi]$, quand n tend vers $+\infty$, ce qui peut s'écrire

$$\|g - \sigma_n(g)\|_\infty = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |g(t) - \sigma_n(g)(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (13)$$

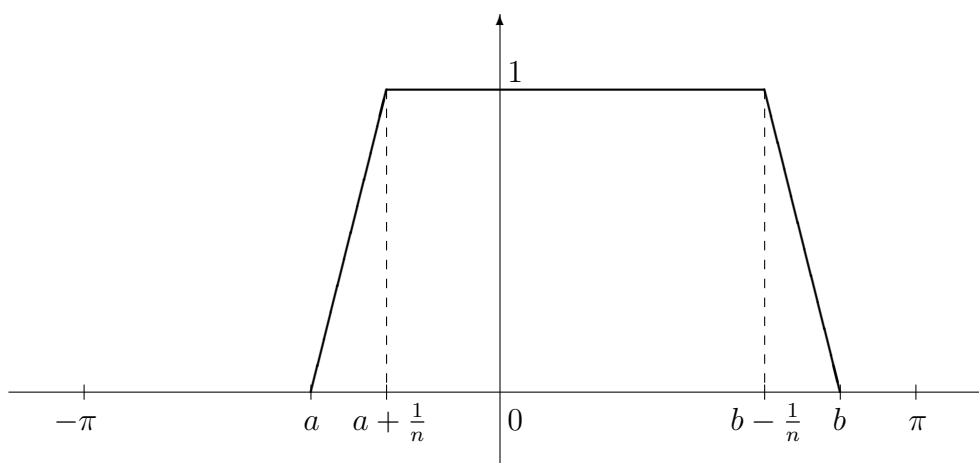
Comme g est bornée et $f \in L^1(\mathbb{T})$, fg est dans $L^1(\mathbb{T})$, donc $\int_{[-\pi, \pi]} fg \, dm$ est bien définie. Sa nullité découle de (12), si on vérifie qu'elle est limite de $\int_{[-\pi, \pi]} f \sigma_n(g) \, dm$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{[-\pi, \pi]} fg \, dm - \int_{[-\pi, \pi]} f \sigma_n(g) \, dm \right| &= \left| \int_{[-\pi, \pi]} f(g - \sigma_n(g)) \, dm \right| \\ &\leq \int_{[-\pi, \pi]} |f| |g - \sigma_n(g)| \, dm \\ &\leq \|g - \sigma_n(g)\|_\infty \int_{[-\pi, \pi]} |f| \, dm \end{aligned}$$

et ce majorant tend vers zéro par (13). On a ainsi prouvé que

$$\forall g \in C(\mathbb{T}), \quad \int_{[-\pi, \pi]} fg \, dm = 0. \quad (14)$$

3) On fixe $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Pour construire une suite (g_n) de fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$, nulles sur $[-\pi, a] \cup [b, \pi]$, telles que $0 \leq g_n \leq \mathbf{1}_{]a, b[}$ et (g_n) converge simplement vers $\mathbf{1}_{]a, b[}$, il suffit de prendre pour g_n la fonction affine par morceaux définie par le dessin suivant :



Pour une définition plus formaliste de g_n , on pose pour $n > (b - a)/2$,

$$g_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-\pi, a] \cup [b, \pi], \\ n(t - a) & \text{si } a < t < a + 1/n, \\ 1 & \text{si } a + 1/n \leq t \leq b - 1/n, \\ n(b - t) & \text{si } b - 1/n < t < b. \end{cases}$$

4) Fixons une version de f , notée encore f (on la considère donc comme une vraie fonction, et plus comme une classe d'équivalence). On peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(fg_n)_{n \geq 1}$. En effet la convergence simple de g_n vers $\mathbf{1}_{]a, b[}$ implique celle de fg_n vers $f\mathbf{1}_{]a, b[}$, au moins en tout point t de $[-\pi, \pi]$ où $|f(t)| < +\infty$. Or f étant m -intégrable, cette condition est réalisée m -presque partout sur $[-\pi, \pi]$, donc fg_n converge m -p.p. vers $f\mathbf{1}_{]a, b[}$. Cette convergence est dominée, à partir du rang $n_0 = [(b - a)/2] + 1$, par $|f|\mathbf{1}_{]a, b[}$ qui est m -intégrable puisque $|f|\mathbf{1}_{]a, b[} \leq |f|$ et f est m -intégrable. On peut donc intervertir limite et intégrale pour obtenir :

$$\int_{[-\pi, \pi]} f\mathbf{1}_{]a, b[} dm = \int_{[-\pi, \pi]} \lim_{n \rightarrow +\infty} (fg_n) dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[-\pi, \pi]} fg_n dm = 0,$$

en raison de (14). On a ainsi montré que

$$\forall a, b \in [-\pi, \pi], \quad \int_{]a, b[} f dm = 0. \quad (15)$$

5) On suppose que f est à valeurs réelles et on note f^+ et f^- la partie positive et la partie négative de la restriction de f à $[-\pi, \pi]$. On note μ et ν les mesures de densités respectives f^+ et f^- par rapport à m . Les fonctions f^+ et f^- sont mesurables positives et m -intégrables car dominées par $|f|$. En reportant l'égalité $f = f^+ - f^-$ dans (15) et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\forall a, b \in [-\pi, \pi], \quad \int_{]a, b[} f^+ dm = \int_{]a, b[} f^- dm.$$

Ceci peut se réécrire :

$$\forall a, b \in [-\pi, \pi], \quad \mu(]a, b[) = \nu(]a, b[).$$

La classe \mathcal{C} des intervalles ouverts $]a, b[$ est un π -système qui engendre la tribu borélienne de l'intervalle ouvert $\Omega :=]-\pi, \pi[$ et comme $\Omega \in \mathcal{C}$, $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. Par le théorème d'unicité des mesures (cas des mesures finies), μ et ν coïncident sur la tribu borélienne de $] - \pi, \pi[$. En fait, elles coïncident aussi sur la tribu borélienne de l'intervalle fermé $[-\pi, \pi]$ car elles sont à densités par rapport à m , pour laquelle les singletons sont de mesure nulle. On a donc bien $\mu = \nu$.

6) Par définition, $f^+ = f^-$ m -presque partout si $m(\{f^+ \neq f^-\}) = 0$. Pour établir cette égalité, nous montrons que $m(A) = 0$ et $m(A') = 0$, où $A := \{f^+ < f^-\}$ et $A' := \{f^- < f^+\}$. Il est clair qu'il suffit de montrer la nullité de $m(A)$, celle de $m(A')$ s'en déduisant par permutation de f^+ et f^- .

Vérifions que A est l'union croissante des ensembles $A_n := \{f^+ + 1/n \leq f^-\}$. Pour tout $t \in A_n$, $f^+(t) + 1/(n+1) \leq f^+(t) + 1/n \leq f^-(t)$, donc $t \in A_{n+1}$. Ainsi $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$ et la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante pour l'inclusion. Il est clair que chaque A_n est inclus dans A , donc l'union des A_n est incluse dans A . Pour vérifier l'inclusion inverse, soit t quelconque dans A . L'inégalité *stricte* $f^+(t) < f^-(t)$ impose la finitude de $f^+(t)$, donc $f^-(t) - f^+(t)$ est bien défini (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) et est strictement positif. Il existe alors un $n_0 = n_0(t)$ tel que $1/n_0 \leq f^-(t) - f^+(t)$ et comme $f^+(t)$ est fini, cette inégalité équivaut à $f^+(t) + 1/n_0 \leq f^-(t)$, d'où $t \in A_{n_0}$. Nous venons de montrer que pour tout $t \in A$, il existe un $n \geq 1$, tel que $t \in A_n$, ce qui se traduit par l'inclusion $A \subset \cup_{n \geq 1} A_n$.

Les A_n (et donc aussi A) sont membres de la tribu borélienne de $[-\pi, \pi]$. Pour le voir, on définit l'application $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+^2$, $t \mapsto (f^-(t), f^+(t))$. Si B et C sont deux boréliens quelconques de $\overline{\mathbb{R}}_+$, $\varphi^{-1}(B \times C) = (f^-)^{-1}(B) \cap (f^+)^{-1}(C)$ est borélien de $[-\pi, \pi]$, en raison de la mesurabilité de f^- et f^+ . La tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}_+^2$ coïncidant avec la tribu produit $\text{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+) \otimes \text{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, ceci suffit pour la mesurabilité de φ . D'autre part, $F_c := \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2; x + c \leq y\}$ est clairement un fermé de $\overline{\mathbb{R}}_+^2$. Comme $A_n = \varphi^{-1}(F_{1/n})$, A_n est bien élément de $\text{Bor}([-\pi, \pi])$.

Par continuité séquentielle croissante de m , on a

$$A_n \uparrow A \quad \Rightarrow \quad m(A_n) \uparrow m(A).$$

Pour prouver la nullité de $m(A)$, il suffit donc de prouver celle de $m(A_n)$ pour tout $n \geq 1$. D'après la question précédente, $\mu(A_n) = \nu(A_n)$. D'autre part,

$$\nu(A_n) = \int_{A_n} f^- dm \geq \int_{A_n} \left(f^+ + \frac{1}{n}\right) dm = \int_{A_n} f^+ dm + \frac{1}{n} m(A_n) = \mu(A_n) + \frac{1}{n} m(A_n).$$

Comme ν est une mesure finie, l'inégalité $\nu(A_n) \geq \nu(A_n) + m(A_n)/n$ impose la nullité de $m(A_n)$. Ceci achève la preuve de l'égalité m -p.p. de f^+ et f^- .

À ce stade, on peut conclure que si f est réelle et m -intégrable et a tous ses coefficients de Fourier nuls, alors f est nulle m -p.p., puisque $f = f^+ - f^-$.

7) Si f est à valeurs complexes, on se ramène au cas où f est réelle, en procédant comme suit. On note d'abord que si f est m -intégrable, \bar{f} l'est aussi et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \overline{c_k(f)} = \int_{[-\pi, \pi]} \overline{f(t)} e^{ikt} dm(t) = c_{-k}(\bar{f}).$$

Par conséquent tous les coefficients de Fourier de \bar{f} sont nuls. Il ne reste plus qu'à utiliser la linéarité des c_k (considérés comme formes linéaires sur $L^1(\mathbb{T})$) pour écrire

$$c_k(\text{Re } f) = \frac{c_k(f) + c_k(\bar{f})}{2} = 0, \quad c_k(\text{Im } f) = \frac{c_k(f) - c_k(\bar{f})}{2i} = 0$$

et conclure par le cas réel que $\text{Re } f$ et $\text{Im } f$ sont nulles m -presque partout.