Estimation de points de rupture pour des paramètres infinidimensionnels dans les courtes épidémies

Alfredas Račkauskas
Vilnius University and Institute of Mathematics and Informatics
Department of Mathematics, Vilnius University
Naugarduko 24, Lt-2006 Vilnius, Lithuania

and

Charles Suquet *
Laboratoire P. Painlevé (UMR 8524 CNRS)
Bât. M2 U.F.R. de Mathématiques
Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex France

Running title
Points de rupture pour épidémies courtes

Résumé

Nous considérons une rupture épidémique dans la loi d'un échantillon à valeurs réels ou dans l'espérance d'éléments aléatoires banachiques. Pour ces deux modèles, nous proposons des procédures consistentes d'estimation de la longueur et de la localisation de la rupture épidémique.

Keywords : change point location, empirical process, epidemic model, partial sums process in Hölder space.

Mathematics Subject Classifications (2000) : 62G05

1 Introduction

Soient $X_1, \dots, X_n$ des observations indépendantes dans un espace mesurable avec des paramètres d'intérêt respectifs $\theta_1, \dots, \theta_n$. On dit que ces paramètres présentent une rupture de type épidémique aux points $1 < k^* < m^* < n$ si

$$\theta_1 = \cdots = \theta_{k^*} = \theta_{m^*+1} = \cdots = \theta_n = \theta'$$

et

$$\theta_k = \theta'' \neq \theta' \quad \text{for} \quad k^* + 1 \leq k \leq m^*.$$

Dans le cas $m^* = n$ nous avons un modèle à une seule rupture brusque. Ces modèles ont été intensivement étudiés dans la littérature (voir par exemple Csörgő et Horváth (1997) pour une revue détaillée). Les modèles de rupture épidémique de paramètres apparaissent en neurophysiologie(voir Commenges *et al.* (1986) et leurs références), dans le contexte des séquences d'ADN (Avery et Henderson, 1999), en économétrie *via* le phénomène des bulles (voir Kirman et Teyssière (2002) et leurs références) etc. Dans tous ces domaines d'application, se posent certainement de très importants problèmes de test de détection d'une rupture épidémique, d'estimation de sa longueur $\ell^* = m^* - k^*$ et de sa localisation $(k^*, m^*]$. Plusieurs tests sont discutés dans les articles mentionnés ci-dessus et aussi par exemple dans Yao (1993), Csörgő et Horváth (1997),Račkauskas et Suquet (2003 a, b).

Dans cet article nous proposons des procédures d'estimation de la longueur et de la localisation de la rupture épidémique. Nos résultats s'appliquent en particulier aux épidémies d'une très courte durée qui *grosso modo* peut être de l'ordre de $\ln^\beta n$ pour un $\beta > 1$. Nous étudions deux modèles. Dans la section 2, nous traitons le cas d'observations unidimensionnelles avec comme paramètre leur fonction de répartition. Dans la section 3 nous considérons des observations infinidimensionnelles (prenant leurs valeurs dans un espace de Banach séparable) avec l'espérance comme paramètre d'intérêt. Pour ces deux modèles nous prouvons la consistance de nos estimateurs de la longueur et de de la localisation de l'épidémie.

2 Distribution functions epidemic

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles de fonctions de répartition continues respectives $F_1, \dots, F_n$. Considérons le modèle épidémique suivant

$$
\begin{aligned}
(H_E):\qquad & \text{il existe des entiers } \ 1 < k^* < m^* < n \ \text{ tels que}\\
& F_1 = F_2 = \dots = F_{k^*} = F_{m^*+1} = \dots = F_n = F,\\
& F_{k^*+1} = \dots = F_{m^*} = G \ \text{ et } \ F \neq G.
\end{aligned}
$$

Nous notons $\ell^* = m^* - k^*$ la longueur de l'épidémie. Dans cette section, nous considérons des estimateurs de la longueur ℓ^* ainsi que des bornes de localisation k^*, m^*.

Pour alléger les écritures, nous noterons $(j, k]$ l'ensemble d'entiers $\{j + 1, \dots, k\}$. Posons pour $i \in (0, n]$

$$V_i := F(X_i),$$

et

$$V_i' := \begin{cases} F(X_i), & \text{si } \ i \notin (k^*, k^* + \ell^*] \\ G(X_i), & \text{si } \ i \in (k^*, k^* + \ell^*]. \end{cases}$$

Ainsi $V_1', \dots, V_n'$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Introduisons les processus de sommes partielles

$$\nu(k, j) := \sum_{i=k+1}^{k+j} Y_i, \quad \nu'(k, j) := \sum_{i=k+1}^{k+j} Y_i',$$

où

$$Y_i(t) := \mathbf{1}\{V_i \le t\} - t, \quad Y_i'(t) := \mathbf{1}\{V_i' \le t\} - t, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n.$$

Pour une certaine fonction de pondération $\rho : [0, 1] \to [0, +\infty[$, définissons maintenant

$$T_\rho(j) := \frac{1}{\rho(j/n)} \max_{0 \le k \le n-j} \|\nu(k, j)\| \tag{1}$$

et définissons de même $T_\rho'(j)$ en remplaçant ν par ν'. Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction, nous notons $\|f\|$ soit sa norme uniforme

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{0 \le t \le 1} |f(t)|$$

ou sa norme L_2

$$\|f\| = \|f\|_2 = \Big(\int_0^1 f^2(t) \, \mathrm{d}t \Big)^{1/2}.$$

Selon la norme $\|\cdot\|$ considérée dans (1) nous utilisons des distances différentes entre les lois (de f.d.r.) F et G. Ainsi $d(F,G)$ désignera la distance de Kolmogorov-Smirnov

$$d(F,G) = d_\infty(F,G) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - G(x)|$$

quand nous utilisons $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ dans (1), tandis que

$$d(F,G) = d_2(F,G) = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|^2 \,\mathrm{d}F(x)\Big)^{1/2},$$

si $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Tout au long de cette section , nous n'interdisons pas à $d(F,G)$ de dépendre de n ni même de tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Le poids ρ dans (1) vise à contrôler la durée de la rupture épidémique.nos hypothèses sur ρ sont résumées par son appartenance à la classe $\mathcal{R}$ suivante.

Définition 1. $\mathcal{R}$ désigne la classe de fonctions croissantes $\rho : [0,1] \to [0,+\infty[$ vérifiant

i) il existe un exposant $0 < \alpha \le 1/2$ et une fonction L, strictement positive sur $[1,\infty)$ et à variation lente normalisée au voisinage de l'infini, tels que
$$\rho(h) = h^\alpha L(1/h), \quad 0 < h \le 1;$$

ii) $t \mapsto \theta(t) = t^{1/2}\rho(1/t)$ est C^1 sur $[1,\infty)$;

iii) il existe un exposant $\beta > 1/2$ et un réel $a > 0$, tels que $t \mapsto \theta(t)\ln^{-\beta}(t)$ soit croissante $[a,\infty)$.

Rappelons que L est dite à variation lente normalisée au voisinage de l'infini si et seulement si pour tout $\delta > 0$, $t^\delta L(t)$ et $t^{-\delta}L(t)$ sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante au voisinage de $+\infty$ (Bingham *et al.*, 1987, Th. 1.5.5). Les principaux exemples pratiques que nous avons en vue s'écrivent

$$\rho(h) = \rho(h,\alpha,\beta) := h^\alpha \ln^\beta(c/h),$$

où le réel β peut être quelconque si $0 < \alpha < 1/2$ tandis que $\beta > 1/2$ si $\alpha = 1/2$.

Remarque 2. Si $\rho \in \mathcal{R}$, alors $f(h) := h^{1/2}/\rho(h)$ est croissante sur un intervalle $(0,b]$. En effet $f(1/t) = \big(t^\delta L(t)\big)^{-1}$ avec $\delta = 1/2 - \alpha$ et $t^\delta L(t)$ est strictement croissante au voisinage de l'infini par variation lente de L quand $\alpha < 1/2$ ou dans la cas $\alpha = 1/2$ à cause du point iii) dans la définition 1 en notant qu'alors $L(t) = \theta(t)$. La fonction $g(h) := h/\rho(h)$ est *a fortiori* croissante au voisinage de 0.

Introduisons les conditions suivantes :

$$\ell^* \to +\infty, \quad \frac{\ell^*}{n} \to 0. \tag{2}$$

$$\frac{\ell^* d(F,G)^2}{\ln \ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty. \tag{3}$$

$$\frac{\ell^* d(F,G)}{\sqrt{n}\rho(\ell^*/n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty. \tag{4}$$

Posons

$$\Delta_n := \max_{1<j<n} T_\rho(j), \quad \Delta'_n := \max_{1<j<n} T'_\rho(j).$$

L'estimation de la durée d'épidémie est basée sur le résultat suivant.

Théorème 3. *Soit $\rho \in \mathcal{R}$. Alors*

$$n^{-1/2}\Delta'_n = O_P(1). \tag{5}$$

Si $\ell^* \to +\infty$ et (4) est vérifiée, alors

$$n^{-1/2}\Delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} +\infty. \tag{6}$$

Démonstration. La bornitude stochastique de $n^{-1/2}\Delta'_n$ découle de la proposition 13 donnée en appendice, appliquée aux processus $Y'_k(t), t \in [0,1]$, $k = 1, 2, \ldots$ et de l'inégalité de Dvoretzky, Kiefer, Wolfowitz (voir par exemple Shorack et Wellner, 1986).

Pour vérifier (6), notons que

$$\Delta_n \geq \frac{\|\nu(k^*, \ell^*)\|}{\rho(\ell^*/n)}$$

et

$$\nu(k^*, \ell^*) = \sum_{k^*<i\leq m^*} (Y_i - Y'_i) + \nu'(k^*, \ell^*).$$

En raison de (5) ceci conduit à

$$n^{-1/2}\Delta_n \geq \frac{\ell^*}{n^{1/2}\rho(\ell^*/n)}\Big\|\frac{1}{\ell^*}\sum_{k^*<i\leq m^*}(Y_i - Y_i')\Big\| - O_P(1). \tag{7}$$

Posons $\widetilde{Y}_i := Y_i - \mathbf{E}\,Y_i$ et $\widetilde{Y}_i' := Y_i' - \mathbf{E}\,Y_i'$. En calculant $\mathbf{E}\,(Y_i - Y_i')$ comme une intégrale de Pettis, on voit facilement que

$$\mathbf{E}\,(Y_i - Y_i') = G \circ F^{-1} - \mathrm{Id},$$

où Id désigne l'application identité sur $[0,1]$. De plus

$$\|\mathbf{E}\,(Y_i - Y_i')\| = d(F,G).$$

Maintenant nous avons (noter que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_\infty$)

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{\ell^*}\sum_{k^*<i\leq m^*}(Y_i - Y_i')\Big\| \;&=\; \Big\|\mathbf{E}\,(Y_i - Y_i') + \frac{1}{\ell^*}\sum_{k^*<i\leq m^*}(\widetilde{Y}_i - \widetilde{Y}_i')\Big\| \\ &\geq\; d(F,G) - \Big\|\frac{1}{\ell^*}\sum_{k^*<i\leq m^*}\widetilde{Y}_i\Big\|_\infty - \Big\|\frac{1}{\ell^*}\sum_{k^*<i\leq m^*}\widetilde{Y}_i'\Big\|_\infty\end{aligned}$$

Le dernier terme ci-dessus a même loi que $(\ell^*)^{-1/2}\|\epsilon_{\ell^*}\|_\infty$, où ϵ_{ℓ^*} désigne le processus empirique bâti sur des variables aléatoires U_i indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Le terme précédent a même loi que $(\ell^*)^{-1/2}\|\epsilon_{\ell^*}(G \circ F^{-1})\|_\infty$. En raison de la convergence en loi de ϵ_{ℓ^*} vers le pont brownien, ceci nous conduit à la minoration

$$\Big\|\frac{1}{\ell^*}\sum_{k^*<i\leq m^*}(Y_i - Y_i')\Big\| \geq d(F,G) - O_P\Big(\frac{1}{\sqrt{\ell^*}}\Big). \tag{8}$$

Revenant à (7), ceci nous donne

$$n^{-1/2}\Delta_n \geq \frac{\ell^* d(F,G)}{n^{1/2}\rho(\ell^*/n)}\Big[1 - O_P\Big(\frac{1}{\sqrt{\ell^*}d(F,G)}\Big)\Big] - O_P(1).$$

Pour achever la preuve, il nous reste seulement à vérifier que sous la condition (4),

$$\sqrt{\ell^*}d(F,G) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty. \tag{9}$$

Avec la fonction θ de la définition 1, (4) se reformule :

$$\frac{\sqrt{\ell^*}d(F,G)}{\theta(n/\ell^*)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty. \tag{10}$$

Comme $\theta(t)$ tend vers l'infini avec t et θ est continue strictement positive sur $[1,+\infty[$, nous avons $\inf\{\theta(t);\ t\geq 1\} > 0$. Ainsi (9) découle de (10). □

Comme estimateur de la durée d'épidémie ℓ^* nous considérons

$$\widehat{\ell^*} = \widehat{\ell^*}(\rho) = \min\{\ell : T_\rho(\ell) = \max_{1<j<n} T_\rho(j)\}. \tag{11}$$

Théorème 4. *Soit $\rho \in \mathcal{R}$. Supposons dans le cadre du modèle (H_E) que les conditions* (2), (3) *et* (4) *soient satisfaites. Alors*

$$\frac{\widehat{\ell^*}}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 1.$$

Démonstration. La conclusion du théorème 4 équivaut à

$$\mathbf{P}\big(\widehat{\ell^*} \leq (1-\varepsilon)\ell^*\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\big(\widehat{\ell^*} \geq (1+\varepsilon)\ell^*\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Nous ne détaillerons que la preuve de la première convergence, celle de la seconde étant complètement similaire. La structure de cette preuve est donnée par l'argument élémentaire suivant. D'abord on remarque que *sur l'évènement* $\big\{\widehat{\ell^*} \leq (1-\varepsilon)\ell^*\big\}$,

$$\max_{\ell\leq(1-\varepsilon)\ell^*} n^{-1/2}T_\rho(\ell) = \max_{\ell\leq\ell^*} n^{-1/2}T_\rho(\ell). \tag{12}$$

On en déduit qu'en notant Mj un majorant du membre de gauche de (12) et Mn un minorant du membre de droite,

$$\mathbf{P}\big(\widehat{\ell^*} \leq (1-\varepsilon)\ell^*\big) \leq \mathbf{P}(\mathrm{Mj} \geq \mathrm{Mn}). \tag{13}$$

Ensuite nous trouvons Mj et Mn adéquats pour obtenir la convergence vers zéro de $\mathbf{P}(\mathrm{Mj} \geq \mathrm{Mn})$. Avant d'entrer dans les détails, il nous faut encore introduire quelques notations. Posons

$$A(k,\ell) := (k, k+\ell] \cap (k^*, k^*+\ell^*] \tag{14}$$

et notons $|A(k,\ell)|$ le cardinal de cet ensemble fini. Maintenant découpons les processus $\nu(k,\ell)=\{\nu(k,\ell;t), t\in[0,1]\}$ en

$$\nu(k,\ell)=\nu'(k,\ell)+\nu''(k,\ell), \tag{15}$$

où

$$\nu''(k,\ell;t)=\sum_{i\in A(k,\ell)}\big(\mathbf{1}\{F(X_i)\le t\}-\mathbf{1}\{G(X_i)\le t\}\big).$$

Pour $i\in(k^*,k^*+\ell^*]$, $\mathbf{E}\big(\mathbf{1}\{F(X_i)\le t\}-\mathbf{1}\{G(X_i)\le t\}\big)=G(F^{-1}(t))-t$, d'où

$$\nu''(k,\ell)=|A(k,\ell)|(G\circ F^{-1}-\mathrm{Id})+\sum_{i\in A(k,\ell)}\eta_i, \tag{16}$$

avec

$$\eta_i(t):=\mathbf{1}\{F(X_i)\le t\}-\mathbf{1}\{G(X_i)\le t\}-\mathbf{E}\big(\mathbf{1}\{F(X_i)\le t\}-\mathbf{1}\{G(X_i)\le t\}\big).$$

Il est clair que

$$\sup_{t\in[0,1]}|G(F^{-1}(t))-t|=d_\infty(F,G)$$

et

$$\int_0^1\big(G(F^{-1}(t))-t\big)^2\,\mathrm{d}t=d_2^2(F,G).$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\big\|\nu''(k,\ell)-|A(k,\ell)|(G\circ F^{-1}-\mathrm{Id})\big\|\le\delta(k,\ell), \tag{17}$$

où

$$\delta(k,\ell):=\Big\|\sum_{i\in A(k,\ell)}\eta_i\Big\|.$$

Puisque $A(k^*,\ell^*)=(k^*,k^*+\ell^*]$, nous en déduisons

$$\|\nu''(k^*,\ell^*)\|\ge\ell^*d(F,G)-\delta(k^*,\ell^*). \tag{18}$$

Maintenant le minorant recherché pour $\max_{\ell\le\ell^*}T_\rho(\ell)$ peut s'obtenir comme suit.

$$\begin{aligned}
\max_{\ell \le \ell^*} T_\rho(\ell) &\ge T_\rho(\ell^*) \\
&= \frac{1}{\rho(\ell^*/n)} \max_{0\le k\le n-\ell^*} \|\nu(k,\ell^*)\| \\
&\ge \frac{1}{\rho(\ell^*/n)} \|\nu(k^*,\ell^*)\| \\
&\ge \frac{1}{\rho(\ell^*/n)} \|\nu''(k^*,\ell^*)\| - \frac{1}{\rho(\ell^*/n)} \|\nu'(k^*,\ell^*)\| \\
&\ge \frac{1}{\rho(\ell^*/n)} \|\nu''(k^*,\ell^*)\| - \Delta_n'. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc de (18) et (19),

$$\max_{\ell \le \ell^*} T_\rho(\ell) \ge \frac{\ell^*}{\rho(\ell^*/n)} d(F,G) - \frac{\delta(k^*,\ell^*)}{\rho(\ell^*/n)} - \Delta_n'. \qquad (20)$$

Cherchons maintenant un majorant de $\max_{\ell\le(1-\varepsilon)\ell^*} T_\rho(\ell)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
T_\rho(\ell) &\le \frac{1}{\rho(\ell/n)} \max_{1<k<n-\ell} \big(\|\nu'(k,\ell;t)\| + \|\nu''(k,\ell;t)\|\big) \\
&\le \Delta_n' + \frac{1}{\rho(\ell/n)} \max_{1<k<n-\ell} \delta(k,\ell) + \frac{1}{\rho(\ell/n)} \max_{1\le k\le n-\ell} |A(k,\ell)| d(F,G).
\end{aligned}$$

Il est clair que pour tout $\ell \le \ell^*$, $|A(k,\ell)| \le \ell$. Nous arrivons ainsi en raison de la remarque 2 à

$$\max_{\ell \le (1-\varepsilon)\ell^*} T_\rho(\ell) \le \Delta_n' + \frac{(1-\varepsilon)\ell^* d(F,G)}{\rho((1-\varepsilon)\ell^*/n)} + Z_n, \qquad (21)$$

où

$$Z_n := \max_{\ell\le\ell^*} \frac{1}{\rho(\ell/n)} \max_{1<k<n-\ell} \delta(k,\ell).$$

Appliquant maintenant (13) avec le minorant (20) et le majorant (21) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big\{\widehat{\ell^*} \le (1-\varepsilon)\ell^*\big\} &\le \mathbf{P}\left\{\Delta_n' + Z_n \ge \frac{d(F,G)}{2}\left(\frac{\ell^*}{\rho(\ell^*/n)} - \frac{(1-\varepsilon)\ell^*}{\rho((1-\varepsilon)\ell^*/n)}\right)\right\} \\
&\le \mathbf{P}\{Z_n \ge A_n\} + \mathbf{P}\big\{n^{-1/2}\Delta_n' \ge C\big\},
\end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante à préciser ultérieurement et

$$\begin{aligned} A_n &:= \frac{d(F,G)}{2}\left(\frac{\ell^*}{\rho(\ell^*/n)} - \frac{(1-\varepsilon)\ell^*}{\rho((1-\varepsilon)\ell^*/n)}\right) - Cn^{1/2} \\ &= \frac{d(F,G)}{2}\frac{\ell^*}{\rho(\ell^*/n)}\left(1 - \frac{\rho(\ell^*/n)(1-\varepsilon)}{\rho((1-\varepsilon)\ell^*/n)} - \frac{2Cn^{1/2}\rho(\ell^*/n)}{\ell^* d(F,G)}\right). \quad (22) \end{aligned}$$

Grâce à (5) dans le théorème 3, on peut trouver pour tout $\varepsilon_1 > 0$ un $C = C(\varepsilon_1)$ tel que pour $n \geq n_1 = n_1(\varepsilon_1)$, $\mathbf{P}\big\{n^{-1/2}\Delta_n' \geq C\big\} < \varepsilon_1$. Donc il reste seulement à prouver que $\mathbf{P}(Z_n \geq A_n)$ converge vers 0 pour toute valeur fixée de C. Du point i) de la définition 1, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(\ell^*/n)(1-\varepsilon)}{\rho((1-\varepsilon)\ell^*/n)} = (1-\varepsilon)^{1-\alpha}. \quad (23)$$

Comme nous avons aussi par (4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2Cn^{1/2}\rho(\ell^*/n)}{\ell^* d(F,G)} = 0,$$

on peut trouver un n_2 tel que pour $n \geq n_2$ la quantité entre parenthèses dans (22) soit supérieure à $\gamma := (1-(1-\varepsilon)^{1-\alpha})/2$. Nous avons maintenant

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq A_n\} \leq \sum_{\ell \leq \ell^*} \sum_{1<k<n-\ell} \mathbf{P}\left\{\frac{\delta(k,\ell)}{\rho(\ell/n)} \geq \frac{\gamma \ell^* d(F,G)}{2\rho(\ell^*/n)}\right\}. \quad (24)$$

À cause de la définition de $\delta(k,\ell)$, les seuls termes à prendre en compte dans la somme ci-dessus sont ceux pour lesquels $A(k,\ell)$ est non vide. En raison de l'inégalité $\|\nu(k,\ell)\|_2 \leq \|\nu(k,\ell)\|_\infty$, il suffit dans les inégalités ci-dessous de considérer le cas où l'on utilise $\|.\|_\infty$ pour calculer $\delta(k,\ell)$ (en conservant néanmoins la liberté d'interpréter $d(F,G)$ comme $d_2(F,G)$ ou $d_\infty(F,G)$). L'inégalité de Dvoretsky-Kiefer-Wolfowitz pour le processus empirique uniforme nous conduit alors à

$$\mathbf{P}\left\{\delta(k,\ell) \geq \frac{\gamma\rho(\ell/n)\ell^* d(F,G)}{2\rho(\ell^*/n)}\right\} \leq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{\rho(\ell/n)^2(\ell^*)^2 d(F,G)^2}{\rho(\ell^*/n)^2 |A(k,\ell)|}\right) \quad (25)$$

où c_1, c_2 sont des constantes positives. En écrivant maintenant

$$\frac{\rho(\ell/n)^2(\ell^*)^2}{\rho(\ell^*/n)^2} = \frac{\rho(\ell/n)^2}{(\ell/n)} \frac{(\ell^*/n)}{\rho(\ell^*/n)^2} \ell\ell^*$$

et en rappelant la remarque 2 et (2), on voit que pour n assez grand

$$\frac{\rho(\ell/n)^2}{(\ell/n)}\frac{(\ell^*/n)}{\rho(\ell^*/n)^2} \geq 1, \quad 1 \leq \ell \leq \ell^*,$$

d'où

$$\mathbf{P}\left\{\delta(k,\ell) \geq \frac{\gamma\rho(\ell/n)\ell^* d(F,G)}{2\rho(\ell^*/n)}\right\} \leq c_1 \exp\left(-c_2\frac{\ell\ell^* d(F,G)^2}{|A(k,l)|}\right). \tag{26}$$

En notant que pour $\ell \leq \ell^*$, il y a au plus $2\ell^*$ indices k pour lesquels $A(k,\ell)$ est non vide en revenant à (24), nous obtenons pour n assez grand

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq A_n\} \leq c_1\ell^* \sum_{\ell=1}^{\ell^*} \exp\left(-c_2\frac{\ell\ell^* d(F,G)^2}{|A(k,l)|}\right).$$

Comme $\ell \geq |A(k,l)|$ on arrive finalement à

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq A_n\} \leq c_1(\ell^*)^2 \exp\big(-c_2\ell^* d(F,G)^2\big)$$

et ce majorant tend vers 0 par la condition (3). □

Remarque 5. Sous la condition bénigne que $\ell^* = O(n^a)$ pour un $0 < a < 1$, (3) résulte de (4). En effet on peut écrire

$$\frac{\ell^* d(F,G)^2}{\ln \ell^*} = \left(\frac{\ell^* d(F,G)}{\sqrt{n}\rho(\ell^*/n)}\right)^2 \frac{\rho(\ell^*/n)^2}{(\ell^*/n)\ln(n/\ell^*)}\frac{\ln(n/\ell^*)}{\ln \ell^*},$$

où les deux premiers facteurs au second membre tendent vers l'infini par respectivement (4) et le point iii) de la définition 1, tandis que $\ell^* = O(n^a)$ nous donne

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln(n/\ell^*)}{\ln \ell^*} > 0.$$

Passons maintenant à l'estimation de la localisation de l'épidémie. Posons

$$\widehat{k}^* = \widehat{k}^*(\rho) = \min\big\{k : \|\nu(k,\widehat{\ell}^*)\| = \max_{0\leq i\leq n-\widehat{\ell}^*} \|\nu(i,\widehat{\ell}^*)\|\big\} \tag{27}$$

et

$$\widehat{m}^* = \widehat{m}^*(\rho) = \widehat{k}^* + \widehat{\ell}^*,$$

où la longueur ℓ^* est estimée par (11), ce qui explique que $\widehat{k}^*$ et $\widehat{m}^*$ dépendent de ρ. Lorsque $\rho(h) = \rho(h;\alpha,\beta)$ nous abrégeons respectivement $\widehat{\ell}^*(\rho)$, $\widehat{k}^*(\rho)$ et $\widehat{m}^*(\rho)$ en $\widehat{\ell}^*(\alpha,\beta)$, $\widehat{k}^*(\alpha,\beta)$ et $\widehat{m}^*(\alpha,\beta)$.

Théorème 6. *Sous les hypothèses du théorème 4*

$$\frac{|\widehat{k}^* - k^*|}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0 \quad et \quad \frac{|\widehat{m}^* - m^*|}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Démonstration. Nous prouverons seulement la première convergence puisque la deuxième découle de la première combinée avec le théorème4.

De la définition de k^* par (27) nous tirons

$$\|\nu(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)\| - \|\nu(k^*, \widehat{\ell}^*)\| \geq 0. \tag{28}$$

En combinant (28) avec (15) et (17) et en notant que $|A(k^*, \widehat{\ell}^*)| = \widehat{\ell}^* \wedge \ell^*$ nous obtenons

$$0 \leq \big(|A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)| - \widehat{\ell}^* \wedge \ell^*\big) d(F, G) + J_n, \tag{29}$$

où

$$J_n := \delta(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*) + \delta(k^*, \widehat{\ell}^*) + \|\nu'(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)\| + \|\nu'(k^*, \widehat{\ell}^*)\|.$$

Pour exploiter (29) nous avons besoin d'une relation entre $|A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)|$ et $|\widehat{k}^* - k^*|$. Le tableau suivant présente les configurations possibles et les résultats correspondants.

Cas	Configuration	$\lvert A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)\rvert =$
1	$\widehat{k}^* + \widehat{\ell}^* \leq k^*$	0
2	$\widehat{k}^* < k^* < \widehat{k}^* + \widehat{\ell}^* \leq k^* + \ell^*$	$\widehat{\ell}^* - \lvert\widehat{k}^* - k^*\rvert$
3	$\widehat{k}^* < k^* < k^* + \ell^* < \widehat{k}^* + \widehat{\ell}^*$	ℓ^*
4	$k^* \leq \widehat{k}^* < k^* + \ell^* < \widehat{k}^* + \widehat{\ell}^*$	$\widehat{\ell}^* - \lvert\widehat{k}^* - k^*\rvert$
5	$k^* + \ell^* \leq \widehat{k}^*$	0

De plus dans le cas 3, $k^* + \ell^* < \widehat{k}^* + \widehat{\ell}^*$ d'où $\ell^* < \widehat{k}^* - k^* + \widehat{\ell}^* = \widehat{\ell}^* - |\widehat{k}^* - k^*|$, ce qui nous permet d'unifier les cas 2, 3 et 4 par la majoration commune

$$|A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)| \leq \widehat{\ell}^* - |\widehat{k}^* - k^*|, \quad \text{sur } E_{2,3,4}, \tag{30}$$

où $E_{2,3,4}$ est l'évènement correspondant à la réunion des cas 2,3 et 4. L'utilisation de (30) avec le minorant de $|A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)|$ fourni par (29) nous mène à

$$|\widehat{k}^* - k^*| \leq \widehat{\ell}^* - \widehat{\ell}^* \wedge \ell^* + \frac{J_n}{d(F,G)} \leq |\widehat{\ell}^* - \ell^*| + \frac{J_n}{d(F,G)}, \quad \text{on } E_{2,3,4}.$$

D'autre part, en notant $E_{1,5}$ l'évènement complémentaire de $E_{2,3,4}$, on voit à cause de (29) et des cas 1 et 5 ci-dessus

$$\widehat{\ell^*} \wedge \ell^* \leq \frac{J_n}{d(F,G)}, \quad \text{sur } E_{1,5}.$$

Ceci implique

$$\mathbf{P}(E_{1,5}) \leq \mathbf{P}\left\{\frac{\widehat{\ell^*} \wedge \ell^*}{\ell^*} \leq \frac{J_n}{\ell^* d(F,G)}\right\}.$$

Par le théorème 4, $(\widehat{\ell^*} \wedge \ell^*)/\ell^*$ tend vers 1 en probabilité. Donc si nous prouvons que

$$\frac{J_n}{\ell^* d(F,G)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0, \tag{31}$$

ceci établira la convergence vers 1 de $\mathbf{P}(E_{2,3,4}) = 1 - \mathbf{P}(E_{1,5})$. Comme

$$\frac{|\widehat{k^*} - k^*|}{\ell^*} \leq \frac{|\widehat{\ell^*} - \ell^*|}{\ell^*} + \frac{J_n}{\ell^* d(F,G)}, \quad \text{sur } E_{2,3,4},$$

la conclusion résultera alors d'une nouvelle invocation du théoreme 4.

Pour valider (31), il est facile de vérifier que $\delta(k^*, \widehat{\ell^*}) = O_P(\sqrt{\ell^*})$ et $\delta(\widehat{k^*}, \widehat{\ell^*}) = O_P(\sqrt{\ell^*})$. Comme $\sqrt{\ell^*} d(F,G)$ tend vers l'infini par (3), ceci nous donne

$$\frac{\delta(\widehat{k^*}, \widehat{\ell^*}) + \delta(k^*, \widehat{\ell^*})}{\ell^* d(F,G)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Majorant finalement $\|\nu'(\widehat{k^*}, \widehat{\ell^*})\| + \|\nu'(k^*, \widehat{\ell^*})\|$ par $2\rho(\widehat{\ell^*}/n)\Delta'_n$, on peut écrire

$$\frac{\|\nu'(\widehat{k^*}, \widehat{\ell^*})\| + \|\nu'(k^*, \widehat{\ell^*})\|}{\ell^* d(F,G)} \leq \frac{2\sqrt{n}\rho(\ell^*/n)}{\ell^* d(F,G)} \times \frac{\Delta'_n}{\sqrt{n}} \times \frac{\rho(\widehat{\ell^*}/n)}{\rho(\ell^*/n)}.$$

Dans ce majorant, le premier facteur tend vers zéro par l'hypothèse (4), le second est en $O_P(1)$ par le théorème 3 et le dernier converge en probabilité vers 1 par le théorème 4 et la variation régunière de ρ au voisinage de zéro. Ceci achève la démonstration. □

Quand la fonction poids ρ est de la forme $\rho(h, \alpha, \beta)$, les théorèmes 4 et 6 ont les corollaires suivants.

Corollaire 7. *Supposons dans le cadre du modèle* (H_E) *que les conditions (2), (3) soient satisfaites et que*

$$\frac{\ell^{*1-\alpha} d(F,G)}{n^{1/2-\alpha}} \to +\infty \quad \textit{pour un } \alpha \in]0,1/2[.$$

Alors

$$\frac{\widehat{\ell^*}(\alpha,0)}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 1, \quad \frac{|\widehat{k}^*(\alpha,0)-k^*|}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0, \quad \frac{|\widehat{m}^*(\alpha,0)-m^*|}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Corollaire 8. *Supposons dans le cadre du modèle* (H_E) *que les conditions (2), (3) soient satisfaites et que*

$$\frac{\ell^* d^2(F,G)}{\ln^{2\beta} n} \to +\infty \quad \textit{pour un } \beta > 1/2.$$

Alors

$$\frac{\widehat{\ell^*}(1/2,\beta)}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 1, \quad \frac{|\widehat{k}^*(1/2,\beta)-k^*|}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0, \quad \frac{|\widehat{m}^*(1/2,\beta)-m^*|}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

3 Épidémie pour l'espérance

Soit B un espace de Banach séparable de norme notée $\|x\|$. Soient $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ des éléments aléatoires i.i.d. à valeurs dans B et d'espérance nulle et soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite déterministe dans B. Considérons le modèle

$$X_k = \begin{cases} \epsilon_k, & \text{pour } \ k = 1, \dots, k^*, m^*+1, \dots, n \\ \mu_n + \epsilon_k, & \text{pour } \ k = k^*+1, \dots, m^*. \end{cases} \tag{32}$$

Pour $0 \leq k < m \leq n$, on définit

$$S_n(k,m) := \sum_{k<i\leq m} (X_i - \overline{X}) \quad \text{et} \quad S'_n(k,m) := \sum_{k<i\leq m} (\epsilon_i - \overline{\epsilon}),$$

où $\overline{X} = n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$ et $\overline{\epsilon} = n^{-1}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$.

Soit $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction de pondération. Pour $1 < j < n$, on définit

$$U(j) = \max_{0\leq k\leq n-j} \|S_n(k,k+j)\|, \qquad V_\rho(j) = \frac{1}{\rho(j/n)} U(j)$$

et on définit de même $U'(j)$, $V'_\rho(j)$.

Nous proposons comme estimateur de la longueur $\ell^* = m^* - k^*$ pour le modèle (32) :

$$\widehat{\ell^*} = \widehat{\ell^*}(\rho) = \min\{\ell : V_\rho(\ell) = \max_{1<j<n} V_\rho(j)\}. \tag{33}$$

Lorsque $\rho(h) = \rho(h;\alpha,\beta)$, nous écrivons $\widehat{\ell^*}(\alpha,\beta)$ pour $\widehat{\ell^*}(\rho)$.

On dit que l'élément alétoire ϵ vérifie le théorème limite central dans B (notation $\epsilon \in \mathrm{CLT}(B)$) si la suite $n^{-1/2}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$ converge en loi dans B, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ désignant des copies indépendantes de ϵ. Il est bien connu (voir Ledoux et Talagrand 1991) qu'en général il n'y a pas de caractérisation du théorème limite central pour ϵ en termes de la seule intégrabilité de ϵ parce que la géométrie de l'espace B intervient dans le problème.

Théorème 9. *Soit $\rho \in \mathcal{R}$. Dans le cadre du modèle (32) supposons que*

$$\epsilon_1 \in \mathrm{CLT}(B), \tag{34}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t\mathbf{P}\big(\|\epsilon_1\| \geq At^{1/2}\rho(1/t)\big) = 0 \quad \textit{pour tout } A > 0, \tag{35}$$

$$\frac{\ell^*}{n} \to 0, \quad \textit{quand } n \to +\infty \tag{36}$$

et

$$n^{1/2}\|\mu_n\| \frac{\ell^*/n}{\rho(\ell^*/n)} \to +\infty \quad \textit{quand } n \to +\infty. \tag{37}$$

Alors

$$\frac{\widehat{\ell^*}}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 1. \tag{38}$$

Démonstration. La technique de preuve est la même que celle du théoreme 4 et repose sur l'inégalité $\mathbf{P}\big(\widehat{\ell^*} \leq (1-\varepsilon)\ell^*\big) \leq \mathbf{P}(\mathrm{Mj} \geq \mathrm{Mn})$ où Mj est un majorant de $\max_{\ell\leq(1-\varepsilon)\ell^*} n^{-1/2}V_\rho(\ell)$ et Mn un minorant de $\max_{\ell\leq\ell^*} n^{-1/2}V_\rho(\ell)$.

En préliminaire nous établissons la bornitude stochastique de $n^{-1/2}\Delta'_n$ où

$$\Delta'_n := \max_{1<j<n} V'_\rho(j).$$

Introduisons le processus $\xi_n^{\mathrm{sr}} := n^{-1/2}\xi_n$ où ξ_n est la ligne polygonale ($[0,1] \to B$) de sommets $(k/n, \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. On voit facilement que

$$n^{-1/2}\Delta'_n \leq \|\xi_n^{\mathrm{sr}}\|_\rho + \sup_{0<h\leq 1} \frac{h}{\rho(h)}\|\xi_n^{\mathrm{sr}}(1)\|.$$

Comme $\rho \in \mathcal{R}$, $h/\rho(h)$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, donc $\sup_{0<h\leq 1} h/\rho(h)$ est fini. À cause de (34), $\xi_n^{\mathrm{sr}}(1)$ converge en loi dans B. Par (34) et (35), ξ_n^{sr} converge en loi dans l'espace de Hölder $\big(\mathrm{H}_\rho^o(B), \|.\|_\rho\big)$ (voir Račkauskas et Suquet, 2004, Th.8). En conséquence nous avons

$$n^{-1/2}\Delta_n' = O_P(1) \quad \text{quand } n \to +\infty. \tag{39}$$

Observons ensuite que

$$\overline{X} = \frac{\ell^*}{n}\mu_n + \overline{\epsilon}$$

et que pour tous $1 \leq \ell \leq n$, $0 \leq k \leq n-\ell$,

$$S_n(k, k+\ell) = \Big(|A(k,\ell)| - \frac{\ell\ell^*}{n}\Big)\mu_n + S_n'(k, k+\ell), \tag{40}$$

où comme précédemment, on a noté $|A(k,\ell)|$ le cardinal de l'intersection $\{k+1, \dots, k+\ell\} \cap \{k^*+1, \dots, k^*+\ell^*\}$. Le cas particulier $k = k^*$, $\ell = \ell^*$ dans (40) donne

$$S_n(k^*, k^*+\ell^*) = S_n'(k^*, k^*+\ell^*) + \ell^*\mu_n(1 - \ell^*/n).$$

Comme $U(\ell^*) \geq \|S_n(k^*, k^*+\ell^*)\|$, nous avons

$$U(\ell^*) \geq \ell^*\Big(1 - \frac{\ell^*}{n}\Big)\|\mu_n\| - \|S_n'(k^*, k^*+\ell^*)\| \geq \ell^*\Big(1 - \frac{\ell^*}{n}\Big)\|\mu_n\| - U'(\ell^*),$$

d'où

$$\max_{\ell \leq \ell^*} V_\rho(\ell) \geq \|\mu_n\| \frac{\ell^*(1 - \ell^*/n)}{\rho(\ell^*/n)} - \Delta_n'. \tag{41}$$

En raison de (39) ceci mène à

$$n^{-1/2} \max_{\ell \leq \ell^*} V_\rho(\ell) \geq n^{1/2}\|\mu_n\| \frac{(\ell^*/n)(1 - \ell^*/n)}{\rho(\ell^*/n)} - O_P(1) =: \mathrm{Mn}. \tag{42}$$

Passons à la recherche d'un Mj adéquat. On commence par remarquer qu'à cause de (40), pour tout $\ell \leq \ell^*$,

$$\|S_n(k, k+\ell)\| \leq \|\mu_n\|\ell(1 - \ell^*/n) + \|S_n'(k, k+\ell)\|,$$

d'où

$$\max_{\ell \leq (1-\varepsilon)\ell^*} V_\rho(\ell) \leq \|\mu_n\| \max_{\ell \leq (1-\varepsilon)\ell^*} \frac{\ell(1 - \ell^*/n)}{\rho(\ell/n)} + \Delta_n'. \tag{43}$$

En raison de la remarque 2 et de l'hypothèse (36), nous avons pour n assez grand

$$\max_{\ell \leq (1-\varepsilon)\ell^*} \frac{\ell(1-\ell^*/n)}{\rho(\ell/n)} = \frac{(1-\varepsilon)\ell^*(1-\ell^*/n)}{\rho((1-\varepsilon)\ell^*/n)}.$$

Ainsi, compte tenu de (39) et (43), nous obtenons

$$n^{-1/2} \max_{\ell \leq (1-\varepsilon)\ell^*} V_\rho(\ell) \leq n^{1/2}\|\mu_n\| \frac{(1-\varepsilon)(\ell^*/n)(1-\ell^*/n)}{\rho((1-\varepsilon)\ell^*/n)} + O_P(1) =: \mathrm{Mj}. \quad (44)$$

Vu l'hypothèse (37), nous avons *sur l'évènement* $\{\mathrm{Mj} \geq \mathrm{Mn}\}$

$$\frac{(1-\varepsilon)\rho(\ell^*/n)}{\rho((1-\varepsilon)\ell^*/n)} \geq 1 - o_P(1). \quad (45)$$

Le premier membre de (45) ayant pour limite $(1-\varepsilon)^{1-\alpha} < 1$, ceci implique la convergence vers zéro de $\mathbf{P}(\mathrm{Mj} \geq \mathrm{Mn})$ quand n tend vers l'infini. Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\widehat{\ell^*} < (1-\varepsilon)\ell^*) = 0.$$

De façon similaire on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\widehat{\ell^*} > (1+\varepsilon)\ell^*) = 0,$$

ce qui complète la preuve du théorème. □

Le choix $\rho(h) = \rho(h; \alpha, \beta)$ nous fournit les corollaires suivants.

Corollaire 10. *Soit* $\alpha \in]0, 1/2[$*. Dans le modèle (32) supposons que*

$$\lim_{t\to+\infty} t\mathbf{P}\big(\|\epsilon_1\| \geq t^{1/2-\alpha}\big) = 0 \quad (46)$$

et

$$\frac{\ell^*}{n} \to 0, \qquad \|\mu_n\| \frac{\ell^{*(1-\alpha)}}{n^{1/2-\alpha}} \to +\infty \quad \textit{quand } n \to +\infty. \quad (47)$$

Alors

$$\frac{\widehat{\ell^*}(\alpha, 0)}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 1.$$

Corollaire 11. *Soit $\beta > 1/2$. Dans le modèle (32), supposons que*

$$\mathbf{E}\exp\left(\lambda\|\epsilon_1\|^{1/\beta}\right) < +\infty \quad \textit{pour tout } \lambda > 0 \tag{48}$$

et

$$\frac{\ell^*}{n} \to 0, \qquad \|\mu_n\|\frac{\ell^{*1/2}}{\ln^\beta n} \to +\infty \quad \textit{quand } n \to +\infty. \tag{49}$$

Alors

$$\frac{\widehat{\ell}^*(1/2,\beta)}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 1.$$

Puisque le modèle autorise la convergence vers zéro de μ_n, l'hypothèse (37), comme (47) ou (49), impose des contraintes sur la vitesse de convergence en relation avec la longueur de la rupture épidémique.

Considérons ensuite l'estimation de la localisation de l'épidémie. La longueur ℓ^* étant estimée par (33), posons

$$\widehat{k}^* = \widehat{k}^*(\rho) = \min\{k : U(\widehat{\ell}^*(\rho)) = \|S_n(k, k+\widehat{\ell}^*(\rho))\|\} \tag{50}$$

et

$$\widehat{m}^* = \widehat{m}^*(\rho) = \widehat{k}^*(\rho) + \widehat{\ell}^*. \tag{51}$$

Théorème 12. *sous les hypothèses du théorème 9, les estimateurs $\widehat{k}^*$ et $\widehat{m}^*$ satisfont*

$$\left|\frac{\widehat{k}^*}{\ell^*} - \frac{k^*}{\ell^*}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0, \quad \textit{et} \quad \left|\frac{\widehat{m}^*}{\ell^*} - \frac{m^*}{\ell^*}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Démonstration. En raison du théorème 9, il suffit de prouver la convergence pour $\widehat{k}^*$. La définition de $\widehat{k}^*$ nous donne l'inégalité

$$\|S_n(k^*, k^* + \widehat{\ell}^*)\| \le \|S_n(\widehat{k}^*, \widehat{k}^* + \widehat{\ell}^*)\|,$$

à partir de laquelle en utilisant (40) et le fait que $|A(k^*, \widehat{\ell}^*)| = \widehat{\ell}^* \wedge \ell^* \ge \widehat{\ell}^*\ell^*/n$, nous obte,nons

$$0 \le \left||A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)| - \frac{\widehat{\ell}^*\ell^*}{n}\right| \cdot \|\mu_n\| - \left(\widehat{\ell}^* \wedge \ell^* - \frac{\widehat{\ell}^*\ell^*}{n}\right)\|\mu_n\| + 2U'(\widehat{\ell}^*). \tag{52}$$

Introduisons les évènements complémentaires

$$E' := \left\{|A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)| < \frac{\widehat{\ell}^*\ell^*}{n}\right\}, \quad E'' := \left\{|A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)| \ge \frac{\widehat{\ell}^*\ell^*}{n}\right\}.$$

Sur l'évènement E', nous avons par (52)

$$0 \le -|A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)| + 2\frac{\widehat{\ell}^* \ell^*}{n} - \widehat{\ell}^* \wedge \ell^* + \frac{2U'(\widehat{\ell}^*)}{\|\mu_n\|},$$

d'où

$$\min\left(\frac{\widehat{\ell}^*}{\ell^*}, 1\right) \le \frac{2\widehat{\ell}^*}{n} + \frac{2\rho(\widehat{\ell}^*/n)\Delta'_n}{\ell^*\|\mu_n\|}. \tag{53}$$

Par (36)–(38) le premier membre de (53) tend en probabilité vers 1 alors que son second membre tend en probabilité vers 0. Il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(E'_n) = 0$.

Sur l'évènement E'', l'inégalité $|A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)| \ge \widehat{\ell}^* \ell^*/n$ exclut les cas 1 et 5 (cf. la preuve du théorème 6) où $|A(\widehat{k}^*, \widehat{\ell}^*)| = 0$, parce que $\widehat{\ell}^*$ et ℓ^* sont tous deux strictement positifs. Donc E'' est inclus dans $E_{2,3,4}$ et (30) est vérifiée sur E''. En raison de (52), nous avons alors sur E''

$$0 \le \widehat{\ell}^* - \widehat{\ell}^* \wedge \ell^* - |\widehat{k}^* - k^*| + \frac{2\rho(\widehat{\ell}^*/n)\Delta'_n}{\|\mu_n\|},$$

d'où

$$\frac{|\widehat{k}^* - k^*|}{\ell^*} \le \frac{\widehat{\ell}^*}{\ell^*} - \min\left(\frac{\widehat{\ell}^*}{\ell^*}, 1\right) + \frac{2\rho(\widehat{\ell}^*/n)\Delta'_n}{\ell^*\|\mu_n\|}. \tag{54}$$

Par (36)–(38), le deuxième membre de (54) tend vers 0 en probabilité, ce qui nous amène à la conclusion puisque $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(E''_n) = 1$. □

A Résultat auxiliaire

Pour un processus stochastique $X = \{X(t), t \in T\}$ indexé par un ensemble arbitraire T, définissons

$$\|X\| := \sup_{t\in T} |X(t)|.$$

Il n'est pas nécessaire que le processus stochastique considéré ici soit une application mesurable à valeurs dans un espace de Banach. L'indépendance des processus stochastiques est entendue au sens usuel. On note P^* la probabilité extérieure.

Proposition 13. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des processus indépendants identiquement distribués, indexés par un ensemble arbitraire et soient $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ ($n \geq 1$). On suppose qu'il existe des constantes c, a, telles que pour tout $k \geq 1$*

$$P^*\big(\|k^{-1/2}S_k\| \geq t\big) \leq c\exp(-at^2), \quad \textit{pour } t > 0. \tag{55}$$

Définissons

$$T_n := n^{-1/2} \max_{0 \leq i < j \leq n} \frac{\|S_j - S_i\|}{\rho((j-i)/n)}, \quad n \geq 1. \tag{56}$$

Alors la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est stochastiquement bornée pourvu que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} 2^j \exp(-\tau\theta^2(2^j)) < +\infty, \tag{57}$$

pour tout $\tau > 0$.

Démonstration. En réécrivant (56) sous la forme

$$n^{1/2}T_n = \max_{1\leq \ell \leq n} \frac{1}{\rho(\ell/n)} \max_{0\leq k\leq n-\ell} \|S_{k+\ell} - S_k\|,$$

nous allons utiliser un découpage dyadique des ensembles d'indexation des ℓ et des k. En introduisant l'entier J_n défini par

$$2^{J_n} \leq n < 2^{J_n+1},$$

nous avons

$$\begin{aligned}
n^{1/2}T_n &= \max_{1\leq j\leq J_n+1} \max_{n2^{-j} < \ell \leq n2^{-j+1}} \frac{1}{\rho(\ell/n)} \max_{1\leq k\leq n-\ell} \|S_{k+\ell} - S_k\| \\
&\leq \max_{1\leq j\leq J_n+1} \max_{n2^{-j} < \ell \leq n2^{-j+1}} \frac{1}{\rho(2^{-j})} \max_{0\leq k< n-n2^{-j}} \|S_{k+\ell} - S_k\| \\
&\leq \max_{1\leq j\leq J_n+1} \max_{n2^{-j} < \ell \leq n2^{-j+1}} \frac{1}{\rho(2^{-j})} \max_{1\leq i<2^j} \max_{(i-1)n2^{-j}\leq k< in2^{-j}} \|S_{k+\ell} - S_k\|.
\end{aligned}$$

Pour $n2^{-j} < \ell \leq n2^{-(j-1)}$ et $(i-1)n2^{-j} \leq k < in2^{-j}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|S_{k+\ell} - S_k\| &\leq \|S_{k+\ell} - S_{[in2^{-j}]}\| + \|S_{[in2^{-j}]} - S_k\| \\
&\leq \max_{in2^{-j} < u < (i+2)n2^{-j}} \|S_u - S_{[in2^{-j}]}\| \\
&\qquad + \max_{(i-1)n2^{-j}\leq k< in2^{-j}} \|S_{[in2^{-j}]} - S_k\|,
\end{aligned}$$

où $[t]$ désigne la partie entière du réel t. Par conséquent

$$T_n \leq T'_n + T''_n,$$

où

$$T'_n = n^{-1/2} \max_{1\leq j\leq J_n+1} \frac{1}{\rho(2^{-j})} \max_{1\leq i<2^j} \max_{in2^{-j}<u<(i+2)n2^{-j}} \|S_u - S_{[in2^{-j}]}\|$$

$$T''_n = n^{-1/2} \max_{1\leq j\leq J_n+1} \frac{1}{\rho(2^{-j})} \max_{1\leq i<2^j} \max_{(i-1)n2^{-j}\leq k<in2^{-j}} \|S_{[in2^{-j}]} - S_k\|.$$

Par stationarité, pour tout $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} P^*\big\{T'_n > \lambda\big\} &\leq \sum_{j=1}^{J_n+1} P^*\Big\{\max_{1\leq i<2^j} \max_{in2^{-j}<u<(i+2)n2^{-j}} \|S_u - S_{[in2^{-j}]}\| > \lambda n^{1/2}\rho(2^{-j})\Big\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{J_n+1} 2^j P^*\Big\{\max_{u\leq 2n2^{-j}} \|S_u\| > \lambda n^{1/2}\rho(2^{-j})\Big\}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité d'Ottaviani (Ledoux et Talagrand 1991, Lemme 6.2) et l'hypothèse (55) nous obtenons

$$P^*(T'_n > \lambda) \leq \sum_{j=1}^{J_n+1} 2^j \frac{c\exp(-a\lambda^2 2^{j-3}\rho^2(2^{-j}))}{1 - c\exp(-a\lambda^2 2^{j-3}\rho^2(2^{-j}))},$$

pourvu que le dénominateur ci-dessus soit strictement positif pour tout $j \geq 1$. Cette condition est clairement remplie pour λ assez grand (indépendamment de n) puisque $\theta(2^j)$ tend vers l'infini avec j et ρ est strictement positif. En utilisant maintenant l'hypothèse (57) nous obtenons la bornitude stochastique de $(T'_n)_{n\geq 1}$ *via* le théorème de convergence dominée pour les séries. La preuve de la bornitude stochastique de $(T''_n)_{n\geq 1}$ est clairement similaire. □

Références

Avery, P.J., Henderson, D.A. (1999). Detecting a changed segment in DNA sequences. *J. of Roy. Statist. Soc. : Series C Appl. Stat.*, **48**, 489–503.

Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. (1987). *Regular variation.* Encyclopaedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press.

COMMENGES, D., SEAL, J., PINATEL, F. (1986). Inference about a Change Point in Experimental Neurophysiology. *Math. Biosc.*, **80**, 81–108.

CSÖRGŐ, M., HORVÁTH, L. (1997). *Limit Theorems in Change-Point Analysis.* John Wiley & Sons, New York.

KIRMAN. A, TEYSSIÈRE, G. (2002). Bubbles and Long Range Dependence in Asset Prices Volatilities, In : *Equilibrium, Markets and Dynamics.* Cars Hommes, Roald Ramer and Cees Withagen editors, p. 307–327. Springer Verlag.

LEDOUX, M., TALAGRAND, M. (1991). *Probability in Banach Spaces.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch. (2003a). Hölder norm test statistics for epidemic change. *Journal of Statistical Planning and Inference.* 2004, vol. **126**, Issue 2, 495–520.

RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch. (2003b). Testing epidemic change of infinite dimensional parameters. To appear in *Statistical Inference for Stochastic Processes.*

RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch. (2004). Necessary and sufficient condition for the Hölderian functional central limit theorem. *Journal of Theoretical Probability* **17 (1)** 221–243, January 2004.

SHORACK G.R. and WELLNER, J.A. (1986). *Empirical processes with applications to statistics.* John Wiley & Sons, New York.

YAO, Q. (1993). Tests for change-points with epidemic alternatives. *Biometrika*, **80**, 179–191.