Corrigé du partiel

Problème : (a) Un calcul direct donne $P^n = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$ (n)

où tous les coefficients étoilés sont >0. Ceci entraîne que pour tout $i, j \geq 0$ $\underline{P_{ij}^n > 0 \quad \forall n \geq j+1}$.

La chaîne $\{X_n, n \geq 0\}$ est donc irréductible par définition, et apériodique puisque $\text{pgcd}(n, n+1) = 1 \quad \forall n \geq 1$.

(b) On a $P_i[\tau_0 > k] = P_i[X_1 \neq 0, \dots, X_k \neq 0]$

$= P_i[X_1 = i+1, \dots, X_k = i+k]$ étant donnée P

$= p_i \cdots p_{i+k-1}$ par Markoff

$$P_i[\tau_0 > k] = \frac{\beta_{i+k}}{\beta_i}$$ par définition de β_i.

Comme $\{X_n\}$ est irréductible, elle est récurrente si et seulement si 0 est un état récurrent, autrement dit ssi $P_0[\tau_0 = +\infty] = 0$. D'autre part on a

$P_0[\tau_0 = +\infty] = \lim_{k \to +\infty} P_0[\tau_0 > k] = \beta_\infty$ par ce qui précède. On en déduit :

$$\{X_n\} \text{ récurrente} \iff \beta_\infty = 0$$

Comme $\{X_n\}$ est irréductible, elle est récurrente positive si et seulement si 0 est un état récurrent positif, autrement dit ssi $E_0[\tau_0] < +\infty$. On sait que

$E_0[\tau_0] = \sum_{k \geq 0} P_0[\tau_0 > k] = \sum_{k \geq 0} \beta_k$. Donc $\{X_n\}$ récurrente $\geq 0 \iff \sum_{k \geq 0} \beta_k$ cv

(c) Soit $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ L'équation $\pi P = \pi$ se résout en

$$\begin{cases} \sum_{i \geq 0} \pi_i q_i = \pi_0 & (1) \\ \pi_i p_i = \pi_{i+1} \quad \forall i \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Par (2) on a $\pi_i = \beta_i \pi_0 \quad \forall i \geq 0$ et donc $\pi_0 \left(\sum_{i \geq 0} \beta_i \right) = 1$ puisque π est une probabilité. Comme $\sum_{i \geq 0} \beta_i$ cv par hypothèse, on en déduit :

$$\pi_i = \frac{\beta_i}{\sum_{k \geq 0} \beta_k} \qquad \forall i \geq 0$$

On vérifie enfin que (1) a bien : $\sum_{i \geq 0} \pi_i q_i = \pi_0 \left(\sum_{i \geq 0} \beta_i q_i \right)$

$$= \pi_0 \left(\sum_{i \geq 0} \beta_i - \beta_{i+1} \right) = \pi_0$$

(d) Le chemin le plus rapide pour aller de 0 à i est $0 \xrightarrow{p_0} 1 \xrightarrow{p_1} 2 \xrightarrow{p_2} \dots \xrightarrow{p_{i-1}} i$ et comprend i étapes. On a donc $\mathbb{P}_0[\tau_i < i] = 0$ et $\mathbb{P}_0[\tau_i = i] = p_0 \cdots p_{i-1} = \beta_i$

Pour aller de 0 à i en un temps $k > i$ il est clair d'après l'allure de P qu'il faut être repassé au moins une fois par 0. La propriété de Markov donne alors

$$\mathbb{P}_0[\tau_i = k] = \sum_{m=1}^{i} \mathbb{P}_0[\tau_0 = m] \, \mathbb{P}_0[\tau_i = k - m]$$

(e) • $m(i,0) = E_i(\tau_0) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_i(\tau_0 > k) = \frac{1}{\beta_i} \sum_{k \geq 0} \beta_{k+i}$ par le (b)

• On a $\mathbb{P}_0[\tau_0 = n] = \mathbb{P}_0[\tau_0 > n-1] - \mathbb{P}[\tau_0 > n] = \beta_{n-1} - \beta_n = \beta_{n-1} q_{n-1}$

- $m(0,i) = i\beta_i + \sum_{k>i} k\, P_0[\tau_i = k]$

$$= i\beta_i + \sum_{n=1}^{i} P_0[\tau_0 = n] \left(\sum_{k>i} k\, P_0[\tau_i = k-n] \right)$$

$$= i\beta_i + \sum_{n=0}^{i-1} \beta_n q_n \left(\sum_{k \geq i+n+1} k\, P_0[\tau_i = k-n-1] \right)$$

$$= i\beta_i + \sum_{n=0}^{i-1} (n+1)\beta_n q_n + \sum_{n=0}^{i-1} \beta_n q_n \underbrace{\left(\sum_{k \geq i+n+1} (k-n-1) P_0[\tau_i = k-n-1] \right)}_{m(0,i)}$$

$$= i\beta_i + \sum_{n=0}^{i-1} (n+1)\beta_n q_n + m(0,i) \sum_{n=0}^{i-1} q_n \beta_n$$

On en déduit $m(0,i)\left(1 - \sum_{n=0}^{i-1} q_n \beta_n\right) = i\beta_i + \sum_{n=0}^{i-1} (n+1)(\beta_n - \beta_{n+1})$

$$= \sum_{n=0}^{i-1} \beta_n \quad \text{par la transformation d'Abel.}$$

D'autre part $1 - \sum_{n=0}^{i-1} q_n \beta_n = \beta_0 + \sum_{n=0}^{i-1} (\beta_{n+1} - \beta_n) = \beta_i$. Donc, finalement,

$$\underline{m(0,i) = \frac{1}{\beta_i} \left(\sum_{n=0}^{i-1} \beta_n \right)}$$

- Pour aller de $i \geq j$ à j il faut passer par 0. On a donc

$$\tau_j \text{ sous } P_i \overset{d}{=} \tau_0 \text{ sous } P_i + \tau_j \text{ sous } P_0 \quad \text{par Markov}$$

D'où $E_i(\tau_j) = E_i(\tau_0) + E_0(\tau_j)$, soit

$$\underline{m(i,j) = m(i,0) + m(0,j)}$$

Pour aller de $0 < j$ à $j > i$ il faut passer par i. On a donc

$$\tau_j \text{ sous } P_0 \overset{d}{=} \tau_i \text{ sous } P_0 + \tau_j \text{ sous } P_i \quad \text{par Markov}$$

D'où $E_0(\tau_j) = E_0(\tau_i) + E_i(\tau_j)$, soit

$$\underline{m(i,j) = m(0,j) - m(0,i)}$$

On a donc $$E_i(\tau_j) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_i} \sum_{k \geq 0} \beta_{k+i} + \frac{1}{\beta_j} \sum_{k=0}^{j-1} \beta_k & i \geq j \\ \frac{1}{\beta_j} \sum_{k=0}^{j-1} \beta_k - \frac{1}{\beta_i} \sum_{k \geq 0} \beta_{k+i} & i < j \end{cases}$$

On retrouve $E_i(\tau_i) = \dfrac{\sum_{k \geq 0} \beta_k}{\beta_i} = \dfrac{1}{\pi_i}$, expression déjà obtenue en (c).

(f) Pour aller de $i \geq j$ à j il faut passer par 0 et le chemin le plus court fait $(j+1)$ étapes. On a donc $\mathbb{P}_i[\tau_j = k] = 0 \quad \forall\, k \leq j \leq i$, et comme en (d)

$$\mathbb{P}_i[\tau_j = k] = \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}_i[\tau_0 = n]\, \mathbb{P}_0[\tau_j = k-n] \quad \forall \begin{cases} k > j \\ i \geq j \end{cases}$$

(g) • On a $m(i,j) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_i[\tau_j = k]$

$$= \sum_{k > j} \mathbb{P}_i[\tau_j = k] = \sum_{k > j} \left(\sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}_i[\tau_0 = n]\, \mathbb{P}_0[\tau_j = k-n] \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_i[\tau_0 = n] \left(\sum_{k \geq n \vee j+1} \mathbb{P}_0[\tau_j = k-n] \right)$$

$$= \mathbb{P}_i(\tau_0 < +\infty) \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_0[\tau_j = k]$$

$$= \mathbb{P}_i(\tau_0 < +\infty)\, \mathbb{P}_0[\tau_j < +\infty] = m(i,0)\, m(0,j)$$

avec $m(i,0) = 1 - \dfrac{\beta_\infty}{\beta_i}$ par (b) pour tout $i \geq 0$

- Si on n'atteint pas j partant de $i<j$, alors on n'atteint pas non plus $j+1 \dots j+n \dots$ On a donc $\{\tau_j = +\infty\} \subset \{N_0 + \dots + N_{j-1} = +\infty\}$ $\mathbb{P}_i$ p.s.

$$\subset \underbrace{\{\exists k<j / N_k = +\infty\}}_{\text{de proba 0 car la marche est transitoire.}}$$

Donc $\mathbb{P}_i[\tau_j = +\infty] = 0$ et $u(i,j) = 1$ pour tout $j > i \geq 0$

- En particulier on a $u(0,j) = 1$ et donc $u(i,j) = 1 - \frac{\beta_\infty}{\beta_i}$ $\forall i \geq j > 0$ et aussi $\forall i \geq j \geq 0$ par le (b). Finalement on a

$$u(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j > i \\ 1 - \frac{\beta_\infty}{\beta_i} & \text{si } j \leq i \end{cases}$$

Exercice: a) • Une proba π sur $\{1 \dots n\}$ est la donnée d'une suite $\pi_i = \pi(\{i\})$ avec $\pi_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$. L'ensemble $\{(x_1 \dots x_N) / x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{N} x_i\} \subset \mathbb{R}^N$ est clairement fermé borné donc compact.

- On sait que $\mu_0 P^i$ est une proba sur E pour tout i puisque P est une matrice de transition. Il est alors clair que μ_n est une mesure positive sur E de masse totale 1, autrement dit une proba sur E. Par compacité, on en extrait une sous-suite convergente $\{\mu_{n_k}\} \to \mu$.

- On a $\mu_{n_k} P - \mu_{n_k} = \frac{1}{n_k+1} (\mu_0 P^{n_k+1} - \mu_0)$ avec $(\mu_0 P^{n_k+1} - \mu_0)$ bornée dans $\mathcal{M}_F(E)$ espace des mesures signées dans E. En effet,

il est clair que $|\gamma_{n_k} P(\{i\}) - \gamma_{n_k}\{i\}| \leq \frac{1}{k} \quad \forall i = 1 \dots N.$

On en déduit $\gamma_{n_k} P - \gamma_{n_k} \longrightarrow 0$, $k \to +\infty$, et donc

$$\underline{\gamma P = P}$$

b) • Comme P est stochastique, on a $P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et donc 1 est valeur propre de P. Donc 1 est aussi valeur propre de ${}^tP$ et ceci prouve l'existence de $m \in \mathbb{R}^N$ non nul tel que $mP = m$.

• On a $|m_j| \leq \sum_{i=1}^{N} |m_i| P_{ij}$ puisque $m_j = \sum_{i=1}^{N} m_i P_{ij}$ par hypothèse, et $\sum_{j=1}^{N} |m_j| = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} |m_i| P_{ij} \right)$ puisque $\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1$. On en déduit

$$\sum_{i=1}^{N} |m_i| P_{ij} = |m_j| \quad \forall j = 1 \dots N, \text{ autrement dit}$$

$$\underline{|m| = |m| P}$$

• On pose $\pi_i = \dfrac{|m_i|}{\sum_{j=1}^{N} |m_j|}$. C'est une proba sur E et elle est clairement solution de $\underline{\pi P = \pi}$.