

SUR LE CONTACT D'UNE HYPERSURFACE QUASI-ORDINAIRE AVEC SES HYPERSURFACES POLAIRES

PATRICK POPESCU-PAMPU

*Université Paris 7 Denis Diderot, Institute de Mathématique—UMR CNRS 7586,
Equipe 'Géométrie et dynamique', Case 7012, 2, place Jussieu,
75251-Paris Cedex 05, France (ppopescu@math.jussieu.fr)*

(Received 11 July 2002; accepted 11 February 2003)

Résumé Nous appelons *polynôme quasi-ordinaire de Laurent* un polynôme unitaire $f(Y)$ dont les coefficients sont des séries de Laurent à plusieurs variables et tel que son discriminant soit le produit d'un monôme de Laurent et d'une série entière de terme constant non-nul. Si la dérivée $\partial f/\partial Y$ rendue unitaire est encore quasi-ordinaire de Laurent—ce qui peut être toujours obtenu par changement de base—nous montrons que l'on peut mesurer le *contact* de ses facteurs avec ceux de f en fonction d'invariants discrets de f qui mesurent le contact entre ses racines, codés sous la forme de *l'arbre d'Eggers-Wall*. Tous les calculs sont faits en termes de chaînes et de cochaînes supportées par cet arbre. Ce travail constitue une généralisation de résultats connus pour les germes de courbes planes.

Keywords: singularités d'hypersurfaces complexes; germes quasi-ordinaires; variétés polaires

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 32S25
Secondary 14M25

1. Introduction

Ce travail est une contribution à l'étude algébrique des germes d'hypersurfaces analytiques complexes, définis par des polynômes quasi-ordinaires. Nous nous intéressons aux *variétés polaires* de ces germes. Notre résultat principal (Théorème 6.3) est une forme précise de l'énoncé suivant.

Considérons un germe \mathcal{Z} d'hypersurface et une projection linéaire ψ sur un hyperplan, par rapport à laquelle le germe est quasi-ordinaire. Supposons qu'une hypersurface polaire P de \mathcal{Z} définie par la même projection est elle aussi quasi-ordinaire pour ψ . Alors la structure du contact des composantes irréductibles de P avec celles de \mathcal{Z} est déterminée par des invariants discrets de \mathcal{Z} par rapport à ψ .

Modulo une formule d'inversion généralisant celle concernant les germes de courbes planes, on peut conjecturer que ces invariants de (\mathcal{Z}, ψ) fournissent des invariants du type topologique plongé de l'hypersurface \mathcal{Z} .

Expliquons brièvement les notions en jeu et le contexte de recherche.

Un germe d'espace analytique réduit équidimensionnel \mathcal{Z} est dit *quasi-ordinaire* s'il existe un morphisme fini ψ du germe vers un espace lisse dont le lieu discriminant est contenu dans un diviseur à croisements normaux.

Dorénavant on supposera que \mathcal{Z} est de plus un germe d'hypersurface de dimension $d \geq 1$.

On peut fixer des coordonnées locales (X_1, \dots, X_d, Y) de l'espace ambiant telles que le morphisme ψ soit la projection parallèle à l'axe des Y et que le lieu discriminant soit contenu dans l'union des hyperplans de coordonnées de l'espace des X_i . Le théorème de préparation de Weierstrass montre alors que le germe \mathcal{Z} est défini par l'annulation d'un polynôme unitaire $f \in \mathbf{C}[[X_1, \dots, X_d]][Y]$ dont le discriminant $\Delta_Y(f)$ est le produit d'un monôme par une unité. Nous disons dans ce cas que le polynôme f est *quasi-ordinaire*.

Les germes quasi-ordinaires apparaissent naturellement dans la méthode introduite par Jung pour l'uniformisation locale des surfaces [9] et usée ultérieurement pour désingulariser des surfaces algébriques ou analytiques complexes (Walker, Hirzebruch, Laufer). Les germes quasi-ordinaires d'hypersurfaces ont en commun avec les germes de courbes planes - dont ils constituent une généralisation - d'admettre des paramétrisations à la Newton-Puiseux (théorème de Jung-Abhyankar). L'étude systématique des surfaces quasi-ordinaires à l'aide de ces paramétrisations a été entreprise par Lipman dans [13], puis étendue en toutes dimensions dans [14].

Venons-en aux *variétés polaires* d'un germe d'hypersurface \mathcal{Z} , pas nécessairement quasi-ordinaire. Leur étude systématique a été démarrée dans les années 70 par Lê et Teissier dans leur recherche d'invariants discrets des germes d'espaces analytiques. Nous nous intéressons plus précisément aux variétés polaires *relatives* à une fonction f de définition du germe \mathcal{Z} . Après avoir fixé un système de coordonnées locales de l'espace ambiant, on peut définir une *application de Gauss complexe* Γ , qui à chaque point régulier de f associe la direction de l'hyperplan affine tangent à l'hypersurface de niveau de f passant par ce point. L'espace-but est un espace projectif \check{P} . Par définition, une variété polaire de codimension k est la fermeture de la préimage par Γ d'un espace projectif de codimension k de \check{P} . En particulier, une hypersurface polaire est la fermeture de la préimage par Γ d'un hyperplan de \check{P} .

Lorsque les coordonnées (X_1, \dots, X_d, Y) sont fixées de telle manière à ce que l'hyperplan projectif choisi paramètre les directions des hyperplans affines de \mathbf{C}^{d+1} qui contiennent l'axe des Y , l'équation de l'hypersurface polaire associée est $\partial f / \partial Y = 0$.

Pour $d = 1$, c'est-à-dire dans le cas d'un germe de courbe plane, les hypersurfaces polaires sont des courbes. Dans [18], Teissier montre que l'étude du contact des courbes polaires *génériques* avec le germe initial fournit des renseignements géométriques fins sur ce germe. Merle [15] étudie numériquement ce contact dans le cas où le germe est irréductible. Eggers étend cette étude au cas des germes pas forcément irréductibles dans [3], en partant d'un résultat prouvé par Kuo et Lu dans [10]. García Barroso [4] raffine les résultats d'Eggers (voir aussi [5] et [6]). Une autre approche, cette fois-ci topologique, de l'étude des courbes polaires, a été initiée par Lê, Michel et Weber dans [11] et [12].

Lorsque $d = 1$, les travaux d'Eggers et García Barroso fournissent une décomposition d'une courbe polaire générique en paquets de composantes irréductibles suivant le contact avec les composantes de \mathcal{Z} . Chaque paquet correspond à un sommet d'un arbre introduit par Eggers pour représenter le contact entre composantes de \mathcal{Z} . Dans [19], Wall réinterprète leurs calculs à l'aide d'algèbre linéaire supportée par l'arbre d'Eggers. Pour plus de détails sur ce qui précède et sur d'autres recherches concernant les courbes polaires on pourra consulter [4] et [17].

Dans ce travail nous montrons que l'approche qui précède peut être étendue aux germes quasi-ordinaires d'hypersurfaces. La notion-clé est celle de *comparabilité* entre séries fractionnaires. Deux telles séries sont *comparables* si leur différence est le produit d'un monôme et d'une unité, on définit alors leur *ordre de coïncidence* comme étant le vecteur à coefficients rationnels formé par les exposants de ce monôme. Cette notion permet de définir les *exposants caractéristiques* d'un polynôme quasi-ordinaire irréductible et l'*ordre de coïncidence* de deux polynômes irréductibles dont le produit est quasi-ordinaire—nous disons alors qu'ils sont à leur tour *comparables*.

Ensuite, si le polynôme $f \in \mathbf{C}[[X_1, \dots, X_d]][Y]$ est quasi-ordinaire, nous lui associons son *arbre d'Eggers–Wall* $\theta(f)$, muni d'une racine. Ses géodésiques maximales partant de la racine correspondent aux facteurs irréductibles de f . Il est muni d'une 1-chaîne appelée *chaîne des extensions*. Celle-ci est construite à partir des extensions du corps $\mathbf{C}((X_1, \dots, X_d))$, obtenues en rajoutant successivement des monômes caractéristiques des facteurs de f .

Nous nous intéressons ensuite aux germes définis par des polynômes g *comparables* à f . Nous introduisons plusieurs manières de *mesurer le contact* de g avec f et nous montrons qu'elles sont toutes équivalentes (Proposition 5.10). La mesure principale, la *chaîne de contact* $[g]^{(f)}$ de g par rapport à f , est une 0-chaîne dont le support est formé des points de $\theta(f)$ où se détachent les géodésiques qui correspondent aux facteurs de g dans $\theta(fg)$ —les *points d'attache* de g dans $\theta(f)$. Le coefficient de chaque point dans $[g]^{(f)}$ est le degré total des facteurs de g qui s'attachent en ce point. La connaissance de $[g]^{(f)}$ se traduit donc immédiatement par une décomposition de g en paquets qui regroupent ses facteurs irréductibles suivant le contact avec ceux de f .

Reformulons plus précisément notre résultat principal.

Théorème 1.1. *Si f est un polynôme quasi-ordinaire et que sa dérivée $\partial f / \partial Y$ lui est comparable, alors la chaîne de contact $[\partial f / \partial Y]^{(f)}$ est déterminée par la chaîne de contact $[f]^{(f)}$ et par la chaîne des extensions.*

La formule précise est donnée dans le Théorème 6.3. Pour prouver ce théorème, nous généralisons d'abord le théorème de Kuo et Lu mentionné précédemment (Proposition 4.4). Ceci nous amène à introduire une première mesure du contact de g avec f , pour g comparable à f quelconque, appelée *famille de contact* de g par rapport à f , qui est une collection d'ordres de coïncidence de racines de g avec celles de f . L'équivalence annoncée des mesures de contact affirme en particulier que la connaissance de la famille de contact de g par rapport à f est équivalente à celle de la chaîne de contact. Ceci provient essentiellement de la Proposition 2.14, que l'on peut énoncer brièvement ainsi.

Proposition 1.2. *Si f et g sont quasi-ordinaires comparables, la collection des ordres de coïncidence d'une racine fixée de g avec les racines de f ne dépend que des exposants caractéristiques de f et de l'ordre de coïncidence de f et g .*

Notre approche est entièrement algébrique et ne suppose aucune hypothèse de généricité du système de coordonnées. En fait nous travaillons avec la notion plus générale de *polynôme quasi-ordinaire de Laurent*, afin de créer un cadre de comparaison avec les travaux d'Abhyankar et Assi [2] concernant les courbes méromorphes.

Remarque (rajoutée après acceptation de l'article). Dans [7], García Barroso et González Pérez ont réussi à éliminer l'hypothèse que $\partial f/\partial Y$ soit comparable à f et ont étendu notre résultat principal à ce cadre plus général. Le Théorème 6.3 est un ingrédient essentiel de leur preuve.

Nous espérons que ce travail puisse donner des renseignements sur les hypersurfaces polaires des germes d'hypersurfaces pas nécessairement quasi-ordinaires, à l'aide de méthodes à la Jung, et qu'ainsi on pourrait l'appliquer, par analogie avec le cas des courbes planes traité par Langevin, Teissier et García Barroso (voir l'appendice de [17]), à l'étude du comportement asymptotique de la courbure de Lipschitz–Killing des fibres de Milnor de f .

2. Les polynômes quasi-ordinaires de Laurent

Dans cette section nous définissons les polynômes quasi-ordinaires de Laurent (LQO). Nous montrons qu'un théorème à la Jung–Abhyankar est valable pour eux, ce qui nous permet de définir les exposants caractéristiques des polynômes LQO irréductibles et l'ordre de coïncidence de deux polynômes LQO irréductibles comparables. Puis nous étudions à l'aide de la théorie de Galois les propriétés des ordres de coïncidence entre les racines d'un tel polynôme.

Si f est un polynôme à une variable sur un anneau intègre, nous désignons par $d(f)$ son degré, par $R(f)$ l'ensemble de ses racines et par $I(f)$ un ensemble d'indices paramétrant ses facteurs irréductibles. Si $i \in I(f)$, nous notons par f_i le facteur correspondant. Donc

$$f = \prod_{i \in I(f)} f_i.$$

Soit $d \in \mathbf{N}^*$ fixé. Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{K} &:= K \cup \{-\infty, +\infty\} \quad \text{si } K \subset \mathbf{Q}^d, \\ X &:= (X_1, \dots, X_d) \quad \text{ou } X_1 \cdots X_d, \\ X^\alpha &:= X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} \quad \text{si } \alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbf{Q}^d, \\ \mathcal{C}[X] &:= \mathcal{C}[X_1, \dots, X_d], \\ \mathcal{C}[[X]] &:= \mathcal{C}[[X_1, \dots, X_d]], \\ \mathcal{C}[[X^l]] &:= \mathcal{C}[[X_1^l, \dots, X_d^l]] \quad \forall l \in \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathcal{C}}[[X]] &:= \varinjlim_{N \in \mathbf{N}^*} \mathcal{C}[[X^{1/N}]], \\
 \mathcal{C}\langle X \rangle &:= \mathcal{C}[X_1, \dots, X_d, X_1^{-1}, \dots, X_d^{-1}], \\
 \mathcal{C}\langle\langle X \rangle\rangle &:= \mathcal{C}[[X_1, \dots, X_d]][X_1^{-1}, \dots, X_d^{-1}], \\
 \mathcal{C}\langle\langle X^l \rangle\rangle &:= \mathcal{C}[[X_1^l, \dots, X_d^l]][X_1^{-1}, \dots, X_d^{-1}] \quad \forall l \in \mathbf{Q}, \\
 \widetilde{\mathcal{C}}\langle\langle X \rangle\rangle &:= \varinjlim_{N \in \mathbf{N}^*} \mathcal{C}\langle\langle X^{1/N} \rangle\rangle,
 \end{aligned}$$

ainsi que les corps des fractions des quatre dernières algèbres, $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}((X))$, $\mathcal{C}((X^l))$, $\mathcal{C}(\langle\langle X \rangle\rangle)$. Puis :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_d &:= \mathcal{C}\langle\langle X \rangle\rangle[Y], \\
 \mathcal{U}_d &:= \text{ensemble des polynômes unitaires dans } \mathcal{A}_d, \\
 \mathcal{I}_d &:= \text{ensemble des polynômes unitaires irréductibles dans } \mathcal{A}_d.
 \end{aligned}$$

Si $\xi \in \widetilde{\mathcal{C}}\langle\langle X \rangle\rangle$, on peut l'écrire de manière unique sous la forme :

$$\xi = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}^d} c_\alpha X^\alpha.$$

On dit que l'ensemble des exposants α tels que $c_\alpha \neq 0$ est le *support* de ξ , noté **Supp**(ξ), que $c_\alpha X^\alpha$ est un *terme* de ξ , que X^α est le *monôme* correspondant à ce terme et que α est l'*exposant* de ce monôme. Il existe alors un $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\text{Supp}(\xi) \subset (1/N)\mathbf{Z}^d$. On définit de la même manière $\text{Supp}(f) \subset \mathbf{Q}^d \times \mathbf{N}$, lorsque $f \in \mathcal{A}_d$.

Définissons une relation d'ordre partiel ' \leq_t ' ('t' est l'initiale de 'terme à terme') sur \mathbf{Q}^d par :

$$\alpha \leq_t \alpha' \Leftrightarrow \alpha_i \leq \alpha'_i \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Si $\alpha \leq_t \alpha'$ et $\alpha \neq \alpha'$, on note $\alpha <_t \alpha'$. On étend cette relation à $\overline{\mathbf{Q}^d}$ en posant $-\infty <_t \alpha <_t +\infty \forall \alpha \in \mathbf{Q}^d$.

Soit $\xi \in \widetilde{\mathcal{C}}\langle\langle X \rangle\rangle$. S'il existe un $\alpha \in \text{Supp}(\xi)$, avec $\alpha \leq_t \alpha'$ pour tout $\alpha' \in \text{Supp}(\xi)$ (et dans ce cas α est unique), nous disons que ξ *admet un terme dominant* et que $c_\alpha X^\alpha$ est le *terme dominant* de ξ . Nous notons alors :

$$v_X(\xi) := \text{l'exposant dominant } \alpha.$$

Remarque. Une série $p \in \widetilde{\mathcal{C}}\langle\langle X \rangle\rangle$ admet un terme dominant si et seulement si $p = X^\alpha \cdot u(X)$, avec $\alpha \in \mathbf{Q}^d$, $u \in \widetilde{\mathcal{C}}[[X]]$, $u(0) \neq 0$.

Si $F' : F$ est une extension galoisienne de corps, on note par $\text{Gal}(F' : F)$ son *groupe de Galois*, formé des automorphismes de F' qui fixent F .

Exemple. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. L'extension $\mathcal{C}((X^{1/N})) : \mathcal{C}((X))$ est galoisienne et son groupe de Galois s'obtient en faisant agir indépendamment le groupe des racines N -èmes de

l'unité sur chaque variable X_i . L'ensemble des séries admettant un terme dominant est donc préservé, ainsi que l'exposant dominant de ces séries.

Pour $d \geq 2$, les éléments de $\widetilde{\mathcal{C}}\langle\langle X \rangle\rangle$ n'ont pas forcément de terme dominant. Ceci motive la définition suivante.

Définition 2.1. On dit que deux éléments ξ, ξ' de $\widetilde{\mathcal{C}}\langle\langle X \rangle\rangle$ sont *comparables* si $\xi - \xi'$ admet un terme dominant. Dans ce cas, $v_X(\xi - \xi') \in \mathbf{Q}^d$ est appelé *l'ordre de coïncidence* de ξ et ξ' que l'on note $K(\xi, \xi') \in \mathbf{Q}^d$. On dit que deux polynômes $f, f' \in \mathcal{I}_d$ sont *comparables* si et seulement si $R(f) \cup R(f') \subset \widetilde{\mathcal{C}}\langle\langle X \rangle\rangle$ et que tous les couples (ξ, ξ') , $\xi \in R(f)$, $\xi' \in R(f')$ sont comparables.

Ceci nous permet de définir la notion centrale de cette section.

Définition 2.2. Considérons $f \in \mathcal{U}_d$. On dit que f est *quasi-ordinaire de Laurent* (en abrégé *LQO*) si son discriminant $\Delta_Y(f)$ a un terme dominant. On dit que f est *quasi-ordinaire* (en abrégé *QO*) si de plus $f \in \mathcal{C}[[X]][Y]$.

Lemme 2.3.

(1) Si $f_1, f_2 \in \mathcal{U}_d$, alors :

$$\Delta_Y(f_1 f_2) = \Delta_Y(f_1) \Delta_Y(f_2) (\text{Res}_Y(f_1, f_2))^2.$$

(2) Tout diviseur d'un polynôme LQO est LQO.

Démonstration. (1) Ceci découle des relations :

$$\text{Res}_Y(f_1, f_2) = \prod_{\xi_1 \in R(f_1)} \prod_{\xi_2 \in R(f_2)} (\xi_1 - \xi_2), \quad (2.1)$$

$$\Delta_Y(f) = \text{Res}_Y\left(f, \frac{\partial f}{\partial Y}\right) = \prod_{\substack{\xi, \xi' \in R(f) \\ \xi \neq \xi'}} (\xi - \xi'). \quad (2.2)$$

(2) Soit $f \in \mathcal{U}_d$ qui est LQO et $f = f_1 f_2$, les deux polynômes étant encore unitaires. D'après le point (1), $\Delta_Y(f_1) \mid \Delta_Y(f)$. Mais l'anneau $\mathcal{C}\langle\langle X \rangle\rangle$ est factoriel et $\Delta_Y(f)$ est une unité, donc c'est aussi le cas pour $\Delta_Y(f_1)$, ce qui montre que f_1 est LQO. \square

Les polynômes LQO ont en commun avec les polynômes unitaires de $\mathcal{C}[[X_1]][Y]$ d'admettre des racines développables en séries fractionnaires.

Proposition 2.4. Soit $f \in \mathcal{U}_d$ qui est LQO. Alors $R(f) \subset \widetilde{\mathcal{C}}\langle\langle X \rangle\rangle$.

Démonstration. Si $f \in \mathcal{C}[[X]][Y]$, ceci est le théorème classique de Jung–Abhyankar, prouvé avec des hypothèses plus générales dans [1].

Supposons à présent que $f \in \mathcal{U}_d$ est LQO.

Notons $N := d(f)$. Considérons $m \in \mathcal{C}[[X]] - \{0\}$ et le polynôme $g \in \mathcal{A}_d$ défini par la relation :

$$g(mY) = m^N f(Y).$$

On voit que g est *unitaire*.

On en déduit immédiatement que $R(g) = mR(f)$. Donc :

$$\Delta_Y(g) = \prod_{\substack{\zeta \neq \zeta' \\ \zeta, \zeta' \in R(g)}} (\zeta - \zeta') = m^{N(N-1)} \Delta_Y(f).$$

Prenons en particulier pour m un *monôme* de $\mathbf{C}[[X]]$ tel que $g \in \mathcal{U}_d$ (ce qui est toujours possible si les exposants de m sont suffisamment grands).

Comme $\Delta_Y(f) \in \mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle$ admet un terme dominant, c'est aussi le cas pour $m^{N(N-1)}\Delta_Y(f)$, c'est-à-dire pour $\Delta_Y(g)$, ce qui montre que g est QO.

Par le théorème de Jung-Abhyankar, $R(g) \subset \widehat{\mathbf{C}[[X]]}$. Comme $R(f) = m^{-1}R(g)$, on obtient bien : $R(f) \subset \widehat{\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle}$. \square

Les polynômes LQO ont non seulement les racines représentables par des séries fractionnaires, mais de plus ces racines sont comparables entre elles. Cette propriété caractérise en fait les polynômes LQO parmi les polynômes ayant leurs racines dans $\widehat{\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle}$.

Proposition 2.5. *Le polynôme $f \in \mathcal{U}_d$ est LQO si et seulement si ses racines sont contenues dans $\widehat{\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle}$ et sont deux à deux comparables.*

Démonstration. Ceci se déduit facilement de la relation (2.2) et de la factorialité de $\mathbf{C}\langle\langle X^{1/N} \rangle\rangle \forall N \in \mathbf{N}^*$. \square

En particulier, les facteurs irréductibles des polynômes LQO sont comparables.

Lemme 2.6. *Si $f \in \mathcal{U}_d$ est LQO et $f_i \in \mathcal{I}_d$ est un facteur irréductible de f , alors l'ensemble $K_i := \{K(\xi, \xi'), \xi \in R(f_i), \xi' \in R(f)\}$ est totalement ordonné par la relation \leq_t .*

Démonstration. Il existe par hypothèse un $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $R(f) \subset \mathbf{C}\langle\langle X^{1/N} \rangle\rangle$.

Fixons $\xi_0 \in R(f_i)$ quelconque. Si $\xi \in R(f_i)$, $\xi' \in R(f)$, comme f_i est irréductible il existe un automorphisme $\sigma \in \text{Gal}(\mathbf{C}\langle\langle X^{1/N} \rangle\rangle : \mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle)$ tel que $\sigma(\xi) = \xi_0$. Alors $K(\xi, \xi') = K(\sigma(\xi), \sigma(\xi')) = K(\xi_0, \sigma(\xi'))$. Ceci montre que l'ensemble considéré est en fait égal à $\{K(\xi_0, \xi), \xi \in R(f)\}$. Si $\xi', \xi'' \in R(f)$, comme $\xi' - \xi'' = (\xi_0 - \xi'') - (\xi_0 - \xi')$ admet par hypothèse un terme dominant, on déduit que $\{K(\xi_0, \xi'), K(\xi_0, \xi'')\}$ est ordonné par \leq_t , ce qui prouve le lemme. \square

Ceci motive la définition suivante, qui généralise celle usée par Zariski [20] dans l'étude des germes de courbes planes.

Définition 2.7. Si $f, f' \in \mathcal{I}_d$ sont LQO comparables, on définit leur *ordre de coïncidence* $K(f, f')$ de la manière suivante :

$$K(f, f') := \max\{K(\xi, \xi'), \xi \in R(f), \xi' \in R(f')\}.$$

Le maximum existe car l'ensemble utilisé dans la définition est totalement ordonné par \leq_t , comme on peut le voir facilement en appliquant le Lemme 2.6 au facteur f du polynôme ff' , qui est LQO par la Proposition 2.5.

Dans la suite de la section nous supposons que $f \in \mathcal{I}_d$ est LQO.

Définition 2.8. L'ensemble des exposants caractéristiques de f est par définition :

$$EC(f) := \{K(\xi, \xi'), \xi, \xi' \in R(f), \xi \neq \xi'\},$$

l'ensemble des ordres de coïncidence entre les racines de f .

Notons par $A_1^{(f)}, \dots, A_{G(f)}^{(f)}$ les exposants caractéristiques de f , avec la convention :

$$A_1^{(f)} <_t \dots <_t A_{G(f)}^{(f)}. \quad (2.3)$$

Comme l'indique l'écriture (2.3), ils sont totalement ordonnés pour la relation $<_t$, d'après le Lemme 2.6.

Notons aussi :

$$A_0^{(f)} := -\infty, \quad A_{G(f)+1}^{(f)} := +\infty.$$

En suivant Lipman [14] et González Pérez [8], introduisons les corps suivants :

$$\begin{aligned} L &:= \mathbf{C}((X)), \\ L_q^{(f)} &:= L(X^{A_1^{(f)}}, \dots, X^{A_q^{(f)}}) \quad \forall q \in \{0, \dots, G(f)\}. \end{aligned}$$

Donc $L_0^{(f)} = L$. On a évidemment :

$$L \hookrightarrow L_1^{(f)} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L_{G(f)}^{(f)}.$$

En suivant [8], introduisons les nombres :

$$\left. \begin{aligned} E_q^{(f)} &:= [L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}] \quad \text{pour } q \in \{0, \dots, G(f)\}, \\ N_q^{(f)} &:= \frac{E_{q-1}^{(f)}}{E_q^{(f)}} \quad \text{pour } q \in \{1, \dots, G(f)\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Pour montrer comment les exposants $A_q^{(f)}$ déterminent les nombres $E_q^{(f)}$, introduisons d'après [14] et [8] les groupes suivants :

$$M_q^{(f)} := \mathbf{Z}^d + \mathbf{Z}A_1^{(f)} + \dots + \mathbf{Z}A_q^{(f)} \quad \forall q \in \{0, \dots, G(f)\}. \quad (2.5)$$

Lemme 2.9. Pour tout $q \in \{0, \dots, G(f)\}$ on a les égalités :

$$L_q^{(f)} = L[X^{M_q^{(f)}}], \quad [L_q^{(f)} : L] = \#(M_q^{(f)}/M_0^{(f)}),$$

où $X^{M_q^{(f)}}$ désigne l'ensemble des monômes dont les exposants appartiennent au groupe $M_q^{(f)}$.

Démonstration. On a immédiatement : $L[X^{M_q^{(f)}}] \subset L_q^{(f)}$.

Réciproquement, $L_q^{(f)} = L[X^{A_1^{(f)}}, \dots, X^{A_q^{(f)}}]$, car les monômes $X^{A_i^{(f)}}$ sont entiers sur L . Ceci montre que $L_q^{(f)} \subset L[X^{M_q^{(f)}}]$, donc on a bien la première égalité de l'énoncé.

Soit maintenant $\mathcal{B}_q \subset M_q^{(f)}$ un ensemble fini tel que le passage au quotient $\mathcal{B}_q \rightarrow M_q^{(f)}/M_0^{(f)}$ soit bijectif. On voit alors facilement que l'ensemble $X^{\mathcal{B}_q}$ est une base de l'extension $L[X^{M_q^{(f)}}] : L$. Ceci prouve la deuxième égalité de l'énoncé. \square

D'autre part on a l'égalité :

$$E_0^{(f)} = d(f). \quad (2.6)$$

Ceci provient de la proposition suivante (voir [14, p. 56]).

Proposition 2.10. *Si $\xi \in R(f)$, alors $L(\xi) = L_{G(f)}^{(f)}$.*

Démonstration. Il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $L(\xi) \subset \mathbf{C}((X^{1/N}))$. Soit

$$\sigma \in \text{Gal}(\mathbf{C}((X^{1/N})) : L(\xi)).$$

Comme les monômes $X^{A_i^{(f)}}$ apparaissent dans le développement en série de ξ , ils sont aussi fixés par σ . Par la théorie de Galois, ils appartiennent à $L(\xi)$, donc $L_{G(f)}^{(f)} \subset L(\xi)$.

Réciproquement, soit $\sigma \in \text{Gal}(\mathbf{C}((X^{1/N})) : L_{G(f)}^{(f)})$. Si $\sigma(\xi) \neq \xi$, comme $\sigma(\xi) \in R(f)$, il existe $q \in \{1, \dots, G(f)\}$ tel que $K(\xi, \sigma(\xi)) = A_q^{(f)}$. Donc $\sigma(X^{A_q^{(f)}}) \neq X^{A_q^{(f)}}$, contradiction. Ainsi ξ est fixé par tous les éléments de $\text{Gal}(\mathbf{C}((X^{1/N})) : L_{G(f)}^{(f)})$, ce qui montre que $L(\xi) \subset L_{G(f)}^{(f)}$. \square

Lemme 2.11. *Soit $\xi \in R(f)$ quelconque. Alors l'extension $(L(\xi) : L)$ est galoisienne et ξ en est un élément primitif. Elle ne dépend pas de la racine ξ choisie.*

Démonstration. Ceci provient de la Proposition 2.10, qui montre que l'extension $L(\xi)$ de L ne dépend pas de la racine ξ choisie. \square

Si $\xi \in R(f)$, par la Proposition 2.11 c'est un élément primitif de l'extension $(L_{G(f)}^{(f)} : L)$. Tout élément $\sigma \in \text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L)$ est donc déterminé par son image $\sigma(\xi) \in R(f)$. Donc, si $\xi, \xi' \in R(f)$ avec $\xi \neq \xi'$, notons par $\sigma_{\xi, \xi'} \in \text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L)$ l'unique automorphisme qui vérifie : $\sigma_{\xi, \xi'}(\xi) = \xi'$.

Lemme 2.12. *Pour tout $q \in \{1, \dots, G(f)\}$ on a l'égalité :*

$$\text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}) = \{\sigma_{\xi, \xi'}, K(\xi, \xi') \succ_t A_q^{(f)}\}.$$

Démonstration. Le raisonnement est semblable à celui de la Proposition 2.10. On a : $\text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}) \subset \{\sigma_{\xi, \xi'}, \xi, \xi' \in R(f), \xi \neq \xi'\}$. Mais :

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi, \xi'} \in \text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)}) &\Leftrightarrow \sigma_{\xi, \xi'}(\zeta) = \zeta \quad \forall \zeta \in L_q^{(f)} \\ &\Leftrightarrow \sigma_{\xi, \xi'}(X^{A_k^{(f)}}) = X^{A_k^{(f)}} \quad \forall k \in \{1, \dots, q\} \\ &\Leftrightarrow v_X(\xi' - \xi) = v_X(\sigma_{\xi, \xi'}(\xi) - \xi) \notin \{A_k^{(f)}, 1 \leq k \leq q\}. \end{aligned}$$

\square

On en déduit immédiatement.

Lemme 2.13. *Si $\xi \in R(f)$ est fixée, pour tout $q \in \{1, \dots, G(f)\}$ on a l'égalité :*

$$\#\{\xi' \in R(f), K(\xi, \xi') \succ_t A_q^{(f)}\} = E_q^{(f)}.$$

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{I}_d$ sont LQO comparables, définissons l'indice de contact $c(f_1, f_2)$ de f_1 et f_2 par les propriétés :

$$\begin{aligned} c(f_1, f_2) &\in \{0, 1, \dots, \min\{G(f_1), G(f_2)\}\}, \\ K(f_1, f_2) &\in]A_{c(f_1, f_2)}^{(f_i)}, A_{c(f_1, f_2)+1}^{(f_i)}] \quad \text{pour chaque } i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Si $E \in \mathbf{N}$, on note par $\bigsqcup_E \{A\}$ l'union disjointe de E exemplaires de l'ensemble $\{A\}$.

Proposition 2.14. *Si $f, g \in \mathcal{I}_d$ sont LQO et comparables, pour tout $\zeta \in R(g)$ on peut exprimer l'ensemble des ordres de coïncidence de ζ avec les racines de f en fonction des exposants caractéristiques de f et de l'ordre de coïncidence de f et g :*

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{\xi \in R(f)} \{K(\xi, \zeta)\} &= \bigsqcup_{E_0^{(f)} - E_1^{(f)}} \{A_1^{(f)}\} \sqcup \bigsqcup_{E_1^{(f)} - E_2^{(f)}} \{A_2^{(f)}\} \\ &\quad \sqcup \dots \sqcup \bigsqcup_{E_{c(f, g)-1}^{(f)} - E_{c(f, g)}^{(f)}} \{A_{c(f, g)}^{(f)}\} \sqcup \bigsqcup_{E_{c(f, g)}^{(f)}} \{K(f, g)\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Fixons $\xi_0 \in R(f)$ tel que : $K(\xi_0, \zeta) = K(f, g)$.

Pour tout $\xi \in R(f)$, en écrivant : $\xi - \zeta = (\xi - \xi_0) + (\xi_0 - \zeta)$ on en déduit que $K(\xi, \zeta) \in \{A_1^{(f)}, \dots, A_{c(f, g)}^{(f)}, K(f, g)\}$, et que toutes ces valeurs sont atteintes lorsque ξ varie.

Regardons combien de fois est atteinte la valeur $A_q^{(f)}$, avec $q \in \{1, \dots, c(f, g)\}$. Comme $A_q^{(f)} <_t K(f, g) = K(\xi_0, \zeta)$, on déduit que pour avoir l'égalité $K(\xi_0, \xi) = A_q^{(f)}$ il est nécessaire et suffisant que :

$$K(\xi_0, \xi) = A_q^{(f)} \quad \Leftrightarrow \quad \xi \in \{\xi', K(\xi_0, \xi') >_t A_{q-1}^{(f)}\} - \{\xi', K(\xi_0, \xi') >_t A_q^{(f)}\}.$$

D'après le Lemme 2.13, on en déduit $\#\{\xi, K(\xi, \zeta) = A_q^{(f)}\} = E_{q-1}^{(f)} - E_q^{(f)}$.

Il nous reste à savoir combien de fois est atteinte la valeur $K(f, g)$. Ceci s'obtient immédiatement à partir des égalités qui précèdent, par soustraction du nombre total d'ordres de coïncidence, qui vaut $d(f) = E_0^{(f)}$:

$$\{\xi, K(\xi, \zeta) = K(f, g)\} = E_{c(f, g)}^{(f)}.$$

La proposition est ainsi démontrée. \square

Remarque. On peut étendre les définitions précédentes aux séries

$$f \in \mathbf{C}[[X_1, \dots, X_d, Y]]$$

telles que $f(0, \dots, 0, Y) = Y^N \cdot u_0(Y)$, avec $u_0(0) \neq 0$ (les séries *Y-distinguées*). En effet, on peut leur appliquer le théorème de préparation de Weierstrass formel : f est le produit d'un polynôme \tilde{f} unitaire en Y par une unité de l'anneau local ambiant. Le polynôme \tilde{f} est défini de manière unique par cette condition, ce qui permet de poser par définition que f est QO si et seulement si \tilde{f} l'est, que $R(f) := R(\tilde{f})$, etc. Il sera bon de lire aussi à ce propos la remarque qui achève la § 4.

3. L'arbre d'Eggers–Wall et les points d'attache

Etant donné un polynôme $f \in \mathcal{U}_d$ qui est LQO, dans cette section nous expliquons la construction de son *arbre d'Eggers–Wall*, qui code les exposants caractéristiques des facteurs irréductibles de f , ainsi que les contacts entre ces facteurs. Si g est un polynôme LQO irréductible comparable à f , nous lui associons un *point d'attache* dans l'arbre d'Eggers–Wall de f , à partir de ses ordres de coïncidence avec les facteurs irréductibles de f .

Si Γ est un graphe, on note par $V(\Gamma)$ l'ensemble de ses sommets.

Supposons d'abord que $f \in \mathcal{I}_d$. On considère un segment fermé orienté, support d'un complexe simplicial $\theta(f)$. Les sommets de $\theta(f)$ sont notés dans l'ordre croissant pour l'orientation du segment : $P_0^{(f)}, \dots, P_{G(f)+1}^{(f)}$. On considère de plus une *bijection* croissante :

$$\nu^{(f)} : V(\theta(f)) \rightarrow \overline{EC(f)}.$$

Donc : $\nu^{(f)}(P_j^{(f)}) = A_j^{(f)}$.

Supposons à présent que $f \in \mathcal{U}_d$. Pour chaque $i \in I(f)$, notons $EC_i := EC(f_i)$. Considérons une subdivision simpliciale $\theta_f(f_i)$ de $\theta(f_i)$ telle qu'il existe une extension $\nu^{(f)} : V(\theta_f(f_i)) \rightarrow \overline{K_i}$ de $\nu^{(f)}|_{V(\theta(f))}$ qui soit encore bijective et croissante. Ceci est possible par le Lemme 2.6. Par la Proposition 2.14 :

$$K_i = EC_i \cup \{K(f_i, f_j), j \in I(f) - \{i\}\}.$$

Notons $P^{(f_i)}(f_j) := (\nu^{(f)})^{-1}(K(f_i, f_j)) \in \theta_f(f_i)$. Pour chaque couple $(i, j) \in I(f) \times I(f)$, $i \neq j$, identifions par un isomorphisme simplicial les segments

$$[P^{(f_i)}(-\infty), P^{(f_i)}(f_j)] \subset \theta_f(f_i) \quad \text{et} \quad [P^{(f_j)}(-\infty), P^{(f_j)}(f_i)] \subset \theta_f(f_j).$$

Après identification on obtient un arbre noté $\theta(f)$. Les diverses fonctions $\nu^{(f)}$ se recollent en $\nu^{(f)} : V(\theta(f)) \rightarrow \overline{\mathcal{Q}^d}$. Après recollement on a $P^{(f_i)}(f_j) = P^{(f_j)}(f_i)$ et $P_k^{(f_i)} = P_k^{(f_j)}$, pour tout k tel que $A_k^{(f_i)} \leq_t K(f_i, f_j)$. Tous les sommets $P_0^{(f_i)}$ pour $i \in I(f)$, se retrouvent identifiés en un sommet $P(-\infty)$ de $\theta(f)$, que nous appelons sa *racine*. Nous notons aussi par $P^{(f_i)}(+\infty) := P_{G(f_i)+1}^{(f_i)}$ l'extrémité de valeur $+\infty$ de la géodésique maximale qui correspond à f_i .

Définition 3.1. On appelle $\theta(f)$ muni de la fonction $\nu^{(f)}$ l'*arbre d'Eggers–Wall* de f .

Illustrons cette construction (voir Figure 1) dans le cas où $f = f_1 f_2$, avec $f_1, f_2 \in \mathcal{I}_d$. L'ensemble des sommets de $\theta(f)$ est :

$$V(\theta(f)) := \bigcup_{i \in I(f)} V(\theta(f_i)) \cup \bigcup_{i, j \in I(f)} \{P^{(f_i)}(f_j)\}.$$

Si P est un sommet de $\theta(f)$, nous disons que $\nu^{(f)}(P)$ est sa *valeur*. La fonction $\nu^{(f)}$ restreinte aux sommets de $\theta(f)$ sera vue aussi comme une 0-cochaîne à valeurs dans $\overline{\mathcal{Q}^d}$.

Si $f, f' \in \mathcal{U}_d$ sont LQO, avec $f \mid f'$, on a un plongement naturel $\theta(f) \hookrightarrow \theta(f')$, qui envoie sommets sur sommets et qui fournit une subdivision de $\theta(f)$. Si $f, g \in \mathcal{U}_d$ sont LQO

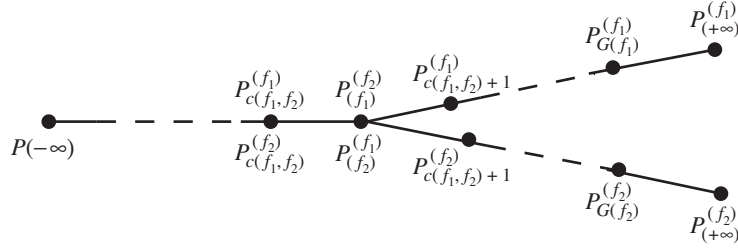


Figure 1.

comparables, nous notons par $\theta_g(f)$ la subdivision de $\theta(f)$ obtenue par le plongement $\theta(f) \hookrightarrow \theta(fg)$. C'est une généralisation des arbres $\theta_f(f_i)$ introduits dans la construction de $\theta(f)$.

Définition 3.2. Si $f \in \mathcal{U}_d$ et $g \in \mathcal{I}_d$ sont LQO comparables, soit :

$$P^{(f)}(g) := \max_{i \in I(f)} \{P^{(f_i)}(g)\},$$

le point de bifurcation dans $\theta(fg)$ des arbres $\theta(f)$ et $\theta(g)$, regardé en tant que point de $\theta(f)$. Nous l'appelons *le point d'attache* de g dans $\theta_g(f)$.

Le point d'attache $P^{(f)}(g)$ a été défini à partir des $P^{(f_i)}(g)$, où f_i varie parmi les composantes irréductibles de f . Mais réciproquement, la connaissance de $P^{(f)}(g)$ entraîne celle de chaque $P^{(f_i)}(g)$, par la relation suivante :

$$P^{(f_i)}(g) = \inf \{P^{(f)}(g), P^{(f_i)}(+\infty)\}.$$

C'est le point de bifurcation des géodésiques joignant la racine aux points $P^{(f)}(g)$ et $P^{(f_i)}(+\infty)$.

D'autre part, la connaissance de $P^{(f_i)}(g)$ est équivalente à celle de $f_i \in \mathcal{I}_d$ et du nombre $K(f_i, g)$. Donc *la connaissance, pour chaque $f_i, i \in I(f)$, de l'ordre de coïncidence $K(f_i, g)$, peut être codée par la connaissance du seul point $P^{(f)}(g) \in V(\theta_g(f))$.*

Dans la Figure 2 nous donnons un exemple d'arbre d'Eggers–Wall $\theta(f)$, sur lequel on a marqué certains des points définis jusqu'à présent. Ici $f = f_1 \cdots f_4$, les polynômes f_i étant irréductibles. En pointillé on indique comment $\theta(f)$ doit être complété afin d'obtenir $\theta(fg)$.

Remarque. La connaissance du point $P^{(f)}(g)$ n'est pas suffisante pour connaître le degré de g ou les exposants caractéristiques de g . Elle fournit sur ces exposants caractéristiques exactement ce qui est connaissable à partir des ordres de coïncidence de g avec les composantes irréductibles de f .

Si $\theta'(f)$ est une subdivision de $\theta(f)$, on note par $C_k(\theta'(f))$ son groupe de k -chaînes, par $C^k(\theta'(f))$ son groupe de k -cochaînes, ou plus simplement par C_k et C^k lorsque $\theta'(f)$ est sous-entendu.

Une 0-chaîne étant donnée, on dit que son *support* est l'ensemble des sommets dont le coefficient est non-nul. Les 1-simplexes des complexes $\theta'(f)$ sont appelés les *arêtes* de $\theta'(f)$.

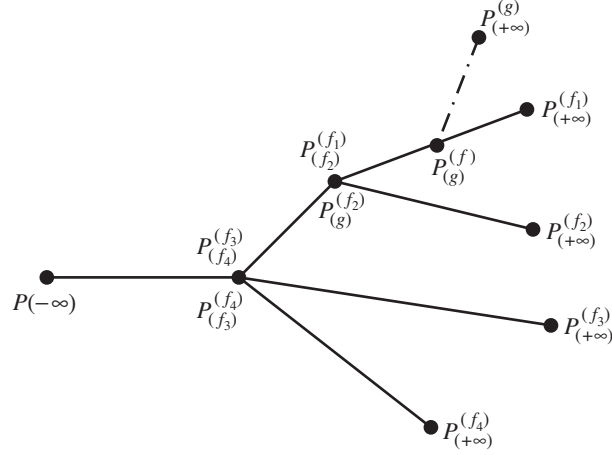


Figure 2.

La notation \overline{PQ} désigne l'élément du groupe $C_1(\theta'(f))$, somme des arêtes orientées joignant P et Q . Si $P \prec Q$, ces points étant les sommets d'une arête de $\theta'(f)$, on dit que ce segment *part* de P et *arrive* en Q . On dit aussi que P est *adjacent inférieurement* à Q et Q est *adjacent supérieurement* à P .

Considérons à nouveau un élément $f \in \mathcal{I}_d$ et la 1-chaîne $\gamma^{(f)} \in C_1(\theta(f))$ donnée par la relation suivante :

$$\gamma^{(f)} := \sum_{k=0}^{G(f)} \frac{d(f)}{E_k^{(f)}} \overline{P_k^{(f)} P_{k+1}^{(f)}} \quad (3.1)$$

Proposition 3.3. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{I}_d$ des polynômes LQO comparables. Si $q \in \{0, 1, \dots, c(f_1, f_2)\}$, on a :

$$\frac{d(f_1)}{E_q^{(f_1)}} = \frac{d(f_2)}{E_q^{(f_2)}}.$$

Démonstration. Pour tout $q \in \{0, 1, \dots, c(f_1, f_2)\}$ on a, grâce au Lemme 2.9 :

$$M_q^{(f_1)} = M_q^{(f_2)} \Rightarrow L_q^{(f_1)} = L_q^{(f_2)} \Rightarrow [L_q^{(f_1)} : L] = [L_q^{(f_2)} : L].$$

Mais pour $i \in \{1, 2\}$,

$$[L_q^{(f_i)} : L] = \frac{[L_{G(f_i)}^{(f_i)} : L]}{[L_{G(f_i)}^{(f_i)} : L_q^{(f_i)}]} = \frac{E_0^{(f_i)}}{E_q^{(f_i)}} \stackrel{(2.6)}{=} \frac{d(f_i)}{E_q^{(f_i)}}.$$

□

Si à présent $f \in \mathcal{U}_d$ est LQO, la proposition précédente montre que les diverses 1-chaînes $\gamma^{(f_i)}$, pour $i \in I(f)$, se *recolent* pour donner une 1-chaîne :

$$\gamma^{(f)} \in C_1(\theta(f)).$$

Pour le voir, il suffit de constater que les 1-chaînes ont des images bien définies lors des subdivisions simpliciales. Ainsi, lorsque un segment se retrouve partagé en plusieurs segments, chacun hérite du même coefficient que le segment initial. Par contre les 1-cochaînes n'ont pas d'images bien définies lors des subdivisions simpliciales. C'est précisément pour cela que l'on a fabriqué avec les nombres $d(f_i)/E_k^{(f_i)}$ une 1-chaîne et non pas une 1-cochaîne, car pour passer des complexes $\theta(f_i)$ à $\theta(f)$ et ultérieurement à $\theta_g(f)$, il faut pratiquer des subdivisions.

Définition 3.4. La 1-chaîne $\gamma^{(f)}$ est appelée *chaîne des extensions* de f .

La raison du nom est que la chaîne $\gamma^{(f)}$ est construite à partir de degrés d'extensions de corps :

$$d(f)/E_k^{(f)} = N_{k+1}^{(f)} \cdots N_{G(f)}^{(f)} = [L_k^{(f)} : L_0^{(f)}]$$

(formules (2.4)).

L'information supplémentaire apportée par la chaîne des extensions est de savoir pour chaque sommet de bifurcation et chaque géodésique maximale qui passe par lui, si la valeur du sommet est ou non un exposant caractéristique du facteur associé. Le fait que cette information soit codée sous la forme d'une 1-chaîne est adapté aux calculs ultérieurs (la Proposition 5.4 et ses applications).

4. Etude de la dérivée d'un polynôme LQO

Lorsque la dérivée $\partial f/\partial Y$ d'un polynôme LQO est aussi LQO, nous montrons qu'une famille d'ordres de coïncidence des racines de f avec celles de $\partial f/\partial Y$ est déterminée par les ordres de coïncidence entre racines de f (Proposition 4.4).

Si $f \in \mathcal{U}_d$, on définit :

$$f_Y := \frac{1}{d(f)} \frac{\partial f}{\partial Y}.$$

C'est la dérivée du polynôme f , rendue unitaire.

Proposition 4.1. *Si $f \in \mathcal{U}_d$ est LQO, f_Y n'est pas forcément LQO. Si le polynôme f_Y est LQO, alors il est comparable à f .*

Démonstration. On va donner des exemples du comportement cité dans l'énoncé avec $d(f) = 3$. Donnons d'abord l'expression des discriminants d'un polynôme unitaire général du troisième degré et de sa dérivée rendue unitaire :

$$\begin{aligned} f &= Y^3 + aY^2 + bY + c, \\ \Delta_Y(f) &= 4a^3c - 6abc + 4b^3 - a^2b^2 + 27c^2, \\ \Delta_Y(f_Y) &= \frac{4}{9}(3b - a^2). \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer qu'il est possible que $\Delta_Y(f)$ admette un terme dominant, mais pas $\Delta_Y(f_Y)$. On donnera deux exemples avec ce comportement pour $d = 2$. En regardant les coefficients comme séries à d variables, on obtient ainsi des exemples pour tout $d \geq 2$.

$$(1) f = Y^3 + X_1 X_2^3 Y^2 + X_1 X_2^7 Y + X_2^4.$$

Alors : $v_X(\Delta_Y(f)) = (0, 8)$.

Mais : $\Delta_Y(f_Y) = \frac{4}{9} X_1 X_2^6 (3X_2 - X_1)$, qui n'a pas de terme dominant.

Ceci est un exemple d'une famille équisingulière de courbes planes (la famille $f = 0$, paramétrée par X_1 ; cela se voit aussi sans calculer le discriminant, en regardant les polygones de Newton à X_1 fixé).

$$(2) f = Y^3 + X_1 X_2 Y^2 + X_1^3 X_2 Y + X_1 X_2.$$

Alors : $v_X(\Delta_Y(f)) = (2, 2)$.

Mais : $\Delta_Y(f_Y) = \frac{4}{9} X_1^2 X_2 (3X_1 - X_2)$, qui n'a pas de terme dominant.

Supposons maintenant que f et f_Y sont LQO. Pour montrer qu'ils sont comparables, il suffit de montrer que $\Delta_Y(f f_Y)$ admet un terme dominant. Appliquons alors la Proposition 2.3 à f et f_Y . Comme $\text{Res}_Y(f, f_Y) = \lambda \Delta_Y(f)$, avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$, et que $\Delta_Y(f)$ admet un terme dominant, on en déduit que $\Delta_Y(f f_Y)$ admet aussi un terme dominant. \square

A cause de cette proposition on sera obligés de se restreindre à la classe \mathcal{C}_d de polynômes qui suit :

$\mathcal{C}_d :=$ ensemble des polynômes $f \in \mathcal{U}_d$ qui sont LQO
et tels que f_Y est LQO et comparable à f .

Remarque. La Proposition 4.1 montre que l'hypothèse de comparabilité avec f est superflue, on l'a rajoutée seulement pour insister sur le fait que c'est elle qui sera directement usée, lors de la définition des ordres de coïncidence entre racines de f et f_Y .

Exemple. Montrons que l'on peut trouver des polynômes de \mathcal{C}_d de tout degré. Partons de n'importe quel polynôme $f \in \mathcal{U}_d$ et considérons le discriminant : $g := \Delta_Y(f f_Y)$. Pour tous les changements de variables monomiaux :

$$X_i = \prod_{j=1}^d T_j^{a_i^j} \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad a_i^j \geq 0, \quad \det(a_i^j) = 1,$$

pour lesquels g' admet un terme dominant, on a : $f' \in \mathcal{C}_d$.

Ici, lorsque $h \in \mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle[Y]$, h' désigne le polynôme obtenu à partir de h après le changement de variables indiqué (changement de base). De tels changements de variables sont toujours possibles, il suffit de considérer ceux donnés par l'un des cônes maximaux d'une subdivision régulière de l'éventail dual du polyèdre de Newton de g (voir plus bas la définition de ce polyèdre; en ce qui concerne l'éventail dual, on pourra consulter [16]).

Introduisons aussi l'anneau :

$$\tilde{\mathcal{A}}_d := \widetilde{\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle}[Y],$$

et les ensembles $\tilde{\mathcal{U}}_d, \tilde{\mathcal{I}}_d$ qui sont à $\tilde{\mathcal{A}}_d$ ce que \mathcal{U}_d et \mathcal{I}_d sont à \mathcal{A}_d .

Pour $g \in \tilde{\mathcal{A}}_d$, définissons son *polyèdre de Newton* :

$$\mathcal{N}(g) := \text{l'enveloppe convexe de l'ensemble } \text{Supp}(g) + \mathbf{R}_+^d \times \{0\} \subset \mathbf{R}^{d+1}.$$

Ses sommets sont des points de $\mathbf{Q}^d \times \mathbf{N}$. Plus précisément, si $g \in \mathbf{C}\langle\langle X^{1/N} \rangle\rangle[Y]$, alors ses sommets appartiennent à $((1/N)\mathbf{Z}^d) \times \mathbf{N}$.

Si \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 sont deux ensembles convexes de \mathbf{R}^{d+1} , notons par $\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2$ leur *somme de Minkowski* :

$$\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 := \{P_1 + P_2, P_i \in \mathcal{N}_i\}$$

qui est encore un ensemble convexe.

Proposition 4.2. *Si $g_1, g_2 \in \tilde{\mathcal{A}}_d$, alors :*

$$\mathcal{N}(g_1 g_2) = \mathcal{N}(g_1) + \mathcal{N}(g_2).$$

Démonstration. C'est du folklore (voir une preuve dans [17]). □

Ceci permet de prouver la proposition suivante.

Proposition 4.3. *Si $g \in \tilde{\mathcal{U}}_d$ et $R(g) \subset \widetilde{\mathbf{C}\langle\langle X \rangle\rangle}$, toutes les racines ayant des termes dominants, alors la connaissance de $\mathcal{N}(g)$ équivaut à la connaissance de la collection $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{v_X(\zeta)\}$ des exposants dominants des racines de g , chacun étant compté avec sa multiplicité.*

Démonstration. Si $g(Y) = \prod_{\zeta \in R(g)} (Y - \zeta)$, par la Proposition 4.2 on obtient :

$$\mathcal{N}(g) = \sum_{\zeta \in R(g)} \mathcal{N}(Y - \zeta).$$

Le polyèdre $\mathcal{N}(Y - \zeta)$ est l'ensemble convexe $s(\zeta) + \mathbf{R}_+^d \times \{0\}$, où $s(\zeta)$ est le segment qui joint les points $(0, 1)$ et $(v_X(\zeta), 0)$ de $\mathbf{Q}^d \times \mathbf{N}$.

Ceci permet de voir que l'on obtient la collection $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{v_X(\zeta)\}$ de la manière suivante. On choisit un chemin formé d'arêtes de $\mathcal{N}(g)$, partant du point $(0, d(g)) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ et aboutissant dans $\mathbf{R}^d \times \{0\}$, sur lequel la restriction de la dernière coordonnée soit strictement décroissante. La collection cherchée est l'union disjointe des inclinaisons des arêtes formant le chemin, chaque inclinaison étant comptée autant de fois que la hauteur de l'arête (si l'arête joint (k_1, h_1) et (k_2, h_2) , avec $h_1 > h_2$, l'inclinaison est $(k_2 - k_1)/(h_1 - h_2) \in \mathbf{R}^d$ et la hauteur est $h_1 - h_2$).

Le fait que l'on retrouve cette collection pour n'importe quel choix de chemin décroissant peut se prouver par récurrence sur le nombre de polyèdres élémentaires de la forme $\mathcal{N}(Y - \zeta)$ intervenant dans la somme de Minkowski : on regarde l'effet de l'addition d'un nouveau polyèdre élémentaire. □

Exemple. Soit $f = f_1 f_2 f_3$, où f_i est le polynôme minimal de ξ_i , avec :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= X_1^{1/2} X_2^{1/2}, \\ \xi_2 &= X_1^{1/2} X_2, \\ \xi_3 &= X_1 X_2^{3/2}. \end{aligned}$$

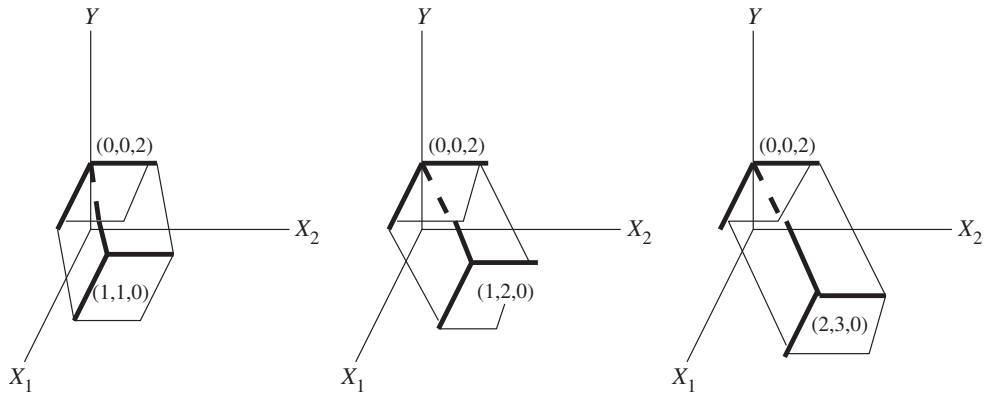


Figure 3.

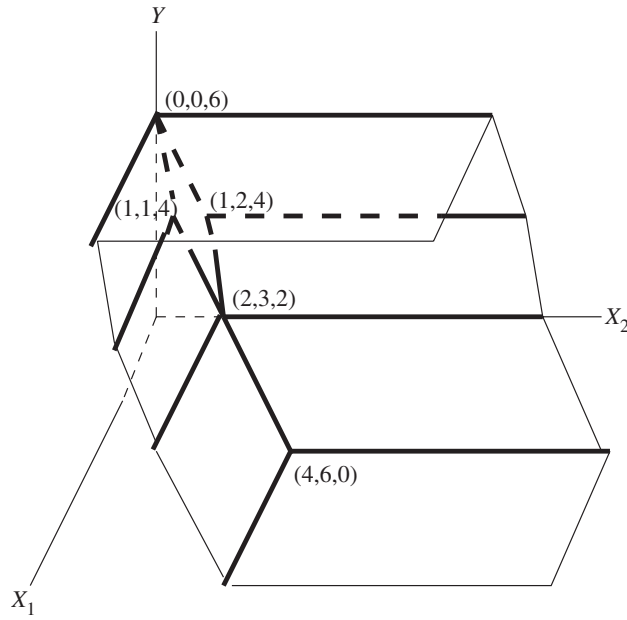


Figure 4.

On obtient :

$$\begin{aligned} f_1 &= Y^2 - X_1 X_2, \\ f_2 &= Y^2 - X_1 X_2^2, \\ f_3 &= Y^2 - X_1^2 X_2^3. \end{aligned}$$

Les polyèdres de Newton des f_i sont montrés dans la Figure 3.

A l'aide de la Proposition 4.2 on obtient le polyèdre de Newton de f (voir Figure 4).

On constate, comme illustration de la proposition 4.3, que l'on peut retrouver les polyèdres de Newton des polynômes f_i en suivant les chemins $(0, 0, 6)$, $(1, 1, 4)$, $(2, 3, 2)$, $(4, 6, 0)$ ou $(0, 0, 6)$, $(1, 2, 4)$, $(2, 3, 2)$, $(4, 6, 0)$.

Enfin, démontrons une extension aux polynômes LQO d'un théorème prouvé par Kuo et Lu dans [10] pour les germes de courbes planes et qui est à la base des travaux [3] et [6].

Proposition 4.4. *Si $f \in \mathcal{C}_d$ est réduit, pour toute racine $\xi \in R(f)$ on a :*

$$\bigsqcup_{\eta \in R(f_Y)} \{K(\xi, \eta)\} = \bigsqcup_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} \{K(\xi, \xi')\}.$$

Démonstration. On a : $f(Y) = \prod_{\zeta \in R(f)} (Y - \zeta)$. Soit $\xi \in R(f)$ quelconque et $g \in \tilde{\mathcal{A}}_d$ défini par :

$$g(Y) := f(Y + \xi).$$

On a donc :

$$g(Y) = \prod_{\zeta \in R(f)} (Y + \xi - \zeta) = Y \prod_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} (Y + \xi - \xi').$$

Comme $\mathcal{N}(\partial g / \partial Y)$ s'obtient à partir de $\mathcal{N}(g)$ en translatant par rapport au vecteur $(0, -1) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ et en ne gardant que la partie contenue dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$, on en déduit que :

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial g}{\partial Y}\right) = \mathcal{N}\left(\prod_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} (Y + \xi - \xi')\right).$$

Mais comme $\partial f / \partial Y = d(f) \prod_{\eta \in R(f_Y)} (Y - \eta)$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial Y}(Y) = \frac{\partial f}{\partial Y}(Y + \xi) = d(f) \prod_{\eta \in R(f_Y)} (Y + \xi - \eta),$$

d'où :

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial g}{\partial Y}\right) = \mathcal{N}\left(\prod_{\eta \in R(f_Y)} (Y + \xi - \eta)\right).$$

On en déduit :

$$\mathcal{N}\left(\prod_{\eta \in R(f_Y)} (Y + \xi - \eta)\right) = \mathcal{N}\left(\prod_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} (Y + \xi - \xi')\right)$$

et grâce à la Proposition 4.3 on obtient l'égalité voulue. \square

5. Mesures de contact et vecteur d'intersection

Si f et g sont des polynômes LQO unitaires comparables, nous introduisons plusieurs mesures du contact de g avec f (disymétriques en f et g). Nous montrons qu'elles sont équivalentes et qu'elles permettent de calculer le *vecteur d'intersection* de f et g (Proposition 5.8).

Dans toute cette section nous considérons que $f \in \mathcal{U}_d$ est LQO réduit.

Définition 5.1. Soit $g \in \mathcal{U}_d$ qui est LQO comparable à f . Nous appelons *famille de contact* de g par rapport à f la collection des ensembles $\bigsqcup_{\zeta \in R(g)} \{K(\xi, \zeta)\}$, paramétrés par $\xi \in R(f)$. Introduisons :

$$[g]^{(f)} := \sum_{j \in I(g)} d(g_j) P^{(f)}(g_j),$$

qui est un élément du groupe $C_0(\theta_g(f))$. Nous l'appelons la *chaîne de contact* de g par rapport à f .

Remarquons que dans la définition de la famille de contact on a considéré les collections des ordres de coïncidence d'une racine fixée de f avec les racines de g , à la différence de la Proposition 2.14, dans laquelle on fixait une racine de g , et où de plus les deux polynômes étaient supposés irréductibles.

La connaissance de $[g]^{(f)}$ est équivalente à la connaissance d'une décomposition de g en produit de '*paquets*' de polynômes irréductibles et des degrés de ces paquets, chaque paquet g_P correspondant à un sommet P de $\theta_g(f)$. Les polynômes g_P ne sont pas nécessairement irréductibles, ils regroupent justement les composantes irréductibles de g en fonction de leurs coïncidences avec les facteurs irréductibles de f . Un facteur irréductible g_j de g divise g_P si et seulement si son point d'attache dans $\theta(f)$ est le point P :

$$g_P := \prod_{\{j, P^{(f)}(g_j)=P\}} g_j.$$

Nous considérons pour cette raison que $[g]^{(f)}$ *mesure le contact* des diverses composantes irréductibles de g avec f .

Si $f \in \mathcal{I}_d$, que $\theta'(f)$ est une subdivision de $\theta(f)$ et que $Q \in V(\theta'(f))$, $Q \neq P(-\infty)$, définissons :

$$c(f, Q) \in \{0, 1, \dots, G(f) + 1\}$$

par la propriété $Q \in]P_{c(f,Q)}^{(f)}, P_{c(f,Q)+1}^{(f)}]$. Posons aussi : $c(f, P(-\infty)) := 0$.

Reprenons la Proposition 2.14, avec $g \in \mathcal{I}_d$ quelconque. On constate que la collection des ordres de coïncidence d'une racine fixée ζ de g avec les racines de f ne dépend pas de la racine choisie et qu'en fait elle ne dépend que du point $P^{(f)}(g)$. Ceci motive l'introduction de l'application suivante :

$$\left. \begin{aligned} & \rho^{(f)} : C_0(\theta'(f)) \rightarrow C_0(\theta'(f)), \\ & \rho^{(f)}(Q) := \sum_{k=1}^{c(f,Q)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) P_k^{(f)} + E_{c(f,Q)}^{(f)} Q \quad \forall Q \in V(\theta'(f)). \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

En particulier $\rho^{(f)}(P(-\infty)) = d(f)P(-\infty)$.

Si $f \mid g$ avec $g \in \mathcal{U}_d$, et que $\theta'(g)$ est une subdivision quelconque de $\theta(g)$, alors la fonction $\rho^{(f)}$ peut être étendue à $C_0(\theta'(g))$ par :

$$\rho^{(f)}(Q) := \rho^{(f)}(\inf\{Q, P^{(f)}(+\infty)\}).$$

Pour le moment nous avons défini $\rho^{(f)}$ pour $f \in \mathcal{I}_d$. Lorsque $f \in \mathcal{U}_d$ quelconque, définissons aussi $\rho^{(f)} : C_0(\theta'(f)) \rightarrow C_0(\theta'(f))$ par la formule :

$$\rho^{(f)} := \sum_{i \in I(f)} \rho^{(f_i)}.$$

Si f, g sont LQO comparables, que $\xi \in R(f_i)$ et $\zeta \in R(g)$, notons par $P(\xi, \zeta)$ l'unique sommet de $\theta_g(f)$ situé sur la géodésique $\theta_g(f_i)$ qui est de valeur $K(\xi, \zeta)$.

Proposition 5.2. *Si $f, g \in \mathcal{U}_d$ sont LQO comparables et que f est réduit, alors on a l'égalité :*

$$\rho^{(f)}([g]^{(f)}) = \sum_{\xi \in R(f)} \left(\sum_{\zeta \in R(g)} P(\xi, \zeta) \right). \quad (5.2)$$

Ainsi $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$ est déterminé par la famille de contact de g par rapport à f .

Démonstration. Le membre droit de (5.2) est évidemment déterminé par la famille de contact de g par rapport à f .

Grâce à la Proposition 2.14, on voit que si $f, g \in \mathcal{I}_d$ sont LQO comparables et si $\zeta \in R(g)$ est fixée, on a : $\rho^{(f)}(P^{(f)}(g)) = \sum_{\xi \in R(f)} P(\xi, \zeta)$.

En additionnant ces égalités pour les $d(g)$ racines de g , on obtient :

$$d(g) \cdot \rho^{(f)}(P^{(f)}(g)) = \sum_{\zeta \in R(g)} \left(\sum_{\xi \in R(f)} P(\xi, \zeta) \right) = \sum_{\xi \in R(f)} \left(\sum_{\zeta \in R(g)} P(\xi, \zeta) \right).$$

Maintenant, si $f, g \in \mathcal{U}_d$, pas forcément irréductibles, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho^{(f)}([g]^{(f)}) &= \sum_{k \in I(g)} d(g_k) \rho^{(f)}(P^{(f)}(g_k)) \\ &= \sum_{k \in I(g)} \sum_{i \in I(f)} d(g_k) \rho^{(f_i)}(P^{(f_i)}(g_k)) \\ &= \sum_{k \in I(g)} \sum_{i \in I(f)} \sum_{\xi \in R(f_i)} \sum_{\zeta \in R(g_k)} P(\xi, \zeta). \end{aligned}$$

□

La proposition précédente implique.

Proposition 5.3. *L'application $\rho^{(f)}$ est injective. En particulier la connaissance de $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$ entraîne celle de $[g]^{(f)}$.*

Démonstration. Grâce à la formule (5.1), on a pour tout $Q \in V(\theta_g(f))$:

$$\rho^{(f)}(Q) = \sum_{i \in I(f)} \rho^{(f_i)}(Q) = \sum_{i \in I(f)} \left(\sum_{k=1}^{c(f_i, Q)} (E_{k-1}^{(f_i)} - E_k^{(f_i)}) P_k^{(f_i)} + E_{c(f_i, Q)}^{(f_i)} Q_i \right),$$

où on a noté :

$$Q_i := \inf\{Q, P^{(f_i)}(+\infty)\}.$$

Mais comme $Q \in V(\theta_g(f))$, il existe un $i \in I(f)$ tel que $Q_i = Q$, ce qui montre que le support de $\rho^{(f)}(Q)$ contient uniquement des points Q' avec $Q' \preceq Q$ et que le coefficient de Q est non nul (il est somme de coefficients strictement positifs). En ordonnant alors les points de $V(\theta_g(f))$ de telle manière à ce que la relation d'ordre \preceq soit préservée, on voit que la matrice de $\rho^{(f)}$ est triangulaire supérieure, avec des coefficients non nuls sur la diagonale. L'application $\rho^{(f)}$ est donc injective. \square

On se propose à présent de calculer la chaîne de contact $[g]^{(f)}$ à partir de $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$ (ce qui revient à inverser $\rho^{(f)}$ sur \mathbf{Q}). Calculer $[g]^{(f)}$ revient à calculer le coefficient de chaque point $P \in V(\theta_g(f))$ dans cette 0-chaîne. Il s'avère plus facile de calculer d'abord la somme des coefficients des points $Q \succ P$. Pour cela on introduit quelques morphismes, qui permettent de faire de l'*algèbre linéaire supportée par $\theta_g(f)$* (voir la formule (5.5)).

Considérons, pour une subdivision fixée de $\theta(f)$, la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightleftharpoons[u]{\epsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0. \quad (5.3)$$

Ici $\epsilon(\sum a(P)P) := \sum a(P)$, $\partial(\overline{PP'}) := P' - P$, $u(m) := mP(-\infty)$.

La connaissance du morphisme u permet de construire canoniquement un morphisme $s : C_0 \rightarrow C_1$ qui vérifie $s \circ \partial = \text{Id}_{C_1}$ et $\partial \circ s + u \circ \epsilon = \text{Id}_{C_0}$. En effet, pour tout $\omega \in C_0$,

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega - u(\epsilon(\omega))) = 0 &\Rightarrow \omega - u(\epsilon(\omega)) \in \text{Ker } \epsilon = \text{Im } \partial \\ &\Rightarrow \exists \psi \in C_1, \partial(\psi) = \omega - u(\epsilon(\omega)). \end{aligned}$$

Comme ∂ est injectif, ψ est unique. On pose : $s(\omega) := \psi$. On a donc :

$$s(P) = \overline{P(-\infty)P},$$

avec la convention $\overline{P(-\infty)P(-\infty)} = 0$.

Considérons un complexe simplicial $\theta'(f)$ fixé, subdivision de $\theta(f)$. Pour tout sommet P de $\theta'(f)$, soit P' l'unique sommet adjacent inférieurement à P . Nous notons par \hat{P} la 1-cochaîne duale de la chaîne représentée par $\overline{P'P}$, par rapport à la base de $C_1(\theta'(f))$ formée par les 1-simplexes de $\theta'(f)$. Si $\psi \in C_1(\theta'(f))$, nous notons $\langle \hat{P}, \psi \rangle$ l'évaluation de la 1-cochaîne \hat{P} sur la 1-chaîne ψ . Ainsi :

$$\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle = \frac{d(f_k)}{E_{c(f_k, P)}^{(f_k)}}, \quad (5.4)$$

pour chaque $k \in I(f)$ tel que $P \preceq P^{(f_k)}(\infty)$. D'autre part :

$$\left\langle \hat{P}, s\left(\sum a(Q)Q\right) \right\rangle = \sum_{\{Q, P \preceq Q\}} a(Q). \quad (5.5)$$

En particulier :

$$\langle \hat{P}, s([g]^{(f)}) \rangle = \sum_{k \in I(g), P \preceq P(f, g_k)} d(g_k). \quad (5.6)$$

Posons maintenant :

$$\sigma^{(f)} := s \circ \rho^{(f)}. \quad (5.7)$$

On obtient la proposition principale de cette section, démontrée d'abord par Wall [19] pour les éléments de $\mathbf{C}\{X_1\}[Y]$.

Proposition 5.4. *Pour tout sommet P de $\theta_g(f)$ on a l'égalité suivante, permettant le calcul de $s([g]^{(f)})$ à partir de $\sigma^{(f)}([g]^{(f)})$ et réciproquement :*

$$\langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([g]^{(f)}) \rangle \cdot \langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle = \langle \hat{P}, s([g]^{(f)}) \rangle \cdot \langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle.$$

Démonstration. On part du terme $\langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([g]^{(f)}) \rangle$, que l'on décompose en somme à l'aide des formules (5.5) et (5.7). A l'aide de la formule (5.1) on fait apparaître des sommes de termes de la forme $d(g_k)E_k^{(f_i)}$. En écrivant que $E_k^{(f_i)} = d(f_i) \cdot (d(f_i)/E_k^{(f_i)})^{-1}$, on reconnaît les termes apparaissant dans $\langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle$ et $\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle$ (voir les formules (5.4) et (5.6)). \square

Si on connaît $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$, on en déduit $\langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([g]^{(f)}) \rangle$ pour tout sommet P de $\theta_g(f)$. Le coefficient $[g]^{(f)}(P)$ de P dans la 0-chaîne $[g]^{(f)}$, peut alors être calculé grâce à la formule (5.6) et à la proposition précédente :

$$[g]^{(f)}(P) = \langle \hat{P}, s([g]^{(f)}) \rangle - \sum_Q \langle \hat{Q}, s([g]^{(f)}) \rangle,$$

la deuxième somme étant prise sur les sommets de $\theta_g(f)$ qui sont adjacents supérieurement (pour \preceq) à P .

Proposition 5.5. *La connaissance de $[g]^{(f)}$ entraîne celle de la famille de contact de g par rapport à f .*

Démonstration. Ecrivons $g = \prod_P g_P$, le produit étant fait sur les sommets P de $\theta_g(f)$. Notons alors : $g_{P,i}$, $i \in I(g_P)$, les facteurs irréductibles de g_P . Soit $\xi \in R(f)$ quelconque. En usant les Propositions 2.14 et 3.3 on obtient :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{\zeta \in R(g_{P,i})} \{K(\xi, \zeta)\} &= \bigsqcup_{k \in \{1, \dots, c(f, g_{P,i})\}} \left(\bigsqcup_{E_{k-1}^{(g_{P,i})} - E_k^{(g_{P,i})}} \{A_k^{(f)}\} \right) \sqcup \bigsqcup_{E_{c(f, g_{P,i})}^{(g_{P,i})}} \{K(f, g_{P,i})\} \\ &= \bigsqcup_{k \in \{1, \dots, c(f, P)\}} \left(\bigsqcup_{d(g_{P,i})(E_{k-1}^{(f)}/d(f) - E_k^{(f)}/d(f))} \{A_k^{(f)}\} \right) \\ &\quad \sqcup \bigsqcup_{d(g_{P,i})(E_{c(f,P)}^{(f)}/d(f))} \{\nu^{(f)}(P)\}. \end{aligned}$$

En prenant l'union disjointe de ces égalités pour tous les $i \in I(g_P)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{\zeta \in R(g_P)} \{K(\xi, \zeta)\} &= \bigsqcup_{i \in I(g_P)} \left(\bigsqcup_{\zeta \in R(g_{P,i})} \{K(\xi, \zeta)\} \right) \\ &= \bigsqcup_{k \in \{1, \dots, c(f, P)\}} \left(\bigsqcup_{d(g_P)(E_{k-1}^{(f)}/d(f) - E_k^{(f)}/d(f))} \{A_k^{(f)}\} \right) \\ &\quad \sqcup \bigsqcup_{d(g_P)(E_{c(f,P)}^{(f)}/d(f))} \{\nu^{(f)}(P)\}. \end{aligned}$$

Mais $d(g_P)$ est le coefficient de P dans la 0-chaîne $[g]^{(f)}$, et la proposition en découle immédiatement. \square

A partir des exposants caractéristiques de f définissons de nouveaux vecteurs $\bar{A}_i \in \mathcal{Q}^d$ de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1^{(f)} &:= A_1^{(f)}, \\ \bar{A}_k^{(f)} &:= N_{k-1}^{(f)} \bar{A}_{k-1}^{(f)} + A_k^{(f)} - A_{k-1}^{(f)} \quad \forall k \in \{2, \dots, G(f)\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

On pourra consulter [8] et [17] pour des détails sur la signification des $\bar{A}_k^{(f)}$. La définition que nous en donnons est récurrente. Exprimons tout d'abord explicitement les $\bar{A}_k^{(f)}$ en fonction des $A_k^{(f)}$ et $E_k^{(f)}$.

Lemme 5.6. *Soit $f \in \mathcal{I}_d$. On a pour tout $q \in \{1, \dots, G(f)\}$:*

$$\bar{A}_q^{(f)} = d(f) \left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}}{E_{q-1}^{(f)}} A_k^{(f)} + A_q^{(f)} \right).$$

Démonstration. Pour $q = 1$ la formule est vraie, elle se prouve ensuite facilement par récurrence en usant les relations de Définition (5.8). \square

Venons-en au nombre d'intersection de deux polynômes LQO.

Définition 5.7. Si $f, g \in \mathcal{U}_d$ sont LQO comparables, le *vecteur d'intersection* de f et g est par définition :

$$(f, g) := v_X(\text{Res}_Y(f, g)) \in \overline{\mathcal{Q}^d}, \quad (5.9)$$

où $\text{Res}_Y(f, g)$ désigne le résultant de f et g .

Dans le cas où $f, g \in \mathcal{C}[[X]][Y]$ définissent des germes de courbes planes, on obtient le nombre d'intersection défini classiquement par la colongueur de l'idéal engendré par f et g : $(f, g) = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[X, Y]]/(f, g)$.

La proposition suivante montre que la chaîne de contact $[g]^{(f)}$ détermine le vecteur d'intersection de f et g .

Proposition 5.8. *Pour tous $f, g \in \mathcal{U}_d$ qui sont LQO comparables :*

$$(f, g) = \nu^{(f)} \circ \rho^{(f)}([g]^{(f)}).$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} (f, g) &= v_X(\text{Res}_Y(f, g)) \\ &= v_X\left(\prod_{\xi \in R(f)} \prod_{\zeta \in R(g)} (\xi - \zeta)\right) \\ &= \sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\zeta \in R(g)} K(\xi, \zeta) \\ &= \nu^{(f)}\left(\sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\zeta \in R(g)} P(\xi, \zeta)\right) \\ &\stackrel{(5.2)}{=} \nu^{(f)} \circ \rho^{(f)}([g]^{(f)}). \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. □

Ceci nous permet de montrer que, lorsque f et g sont irréductibles, leur vecteur d'intersection et leur ordre de coïncidence se déterminent réciproquement (dans le cas où $f, g \in \mathcal{C}[[X]][[Y]]$, cette proposition est parfois attribuée à Noether, voir [17]).

Proposition 5.9. *Si $f, g \in \mathcal{I}_d$ sont LQO comparables, alors :*

$$\begin{aligned} \frac{(f, g)}{d(g)} &= \sum_{k=1}^{c(f, g)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) A_k^{(f)} + E_{c(f, g)}^{(f)} K(f, g) \\ &= E_{c(f, g)-1}^{(f)} \bar{A}_{c(f, g)}^{(f)} + E_{c(f, g)}^{(f)} (K(f, g) - A_{c(f, g)}^{(f)}). \end{aligned}$$

Si $K(f, g) = A_q^{(f)}$, $q \in \{1, \dots, G(f)\}$, alors :

$$\frac{(f, g)}{d(g)} = E_{q-1}^{(f)} \bar{A}_q^{(f)}.$$

Démonstration. On a : $[g]^{(f)} = d(g)P^{(f)}(g)$. Donc, en utilisant la formule de définition de $\rho^{(f)}$:

$$\begin{aligned} \rho^{(f)}([g]^{(f)}) &= d(g)\rho^{(f)}(P^{(f)}(g)) \\ &= d(g)\left(\sum_{k=1}^{c(f, g)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) P_k^{(f)} + E_{c(f, g)}^{(f)} P^{(f)}(g)\right). \end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 5.8, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (f, g) &= \nu^{(f)} \circ \rho^{(f)}([g]^{(f)}) \\
 &= d(g) \left(\sum_{k=1}^{c(f,g)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) \nu^{(f)}(P_k^{(f)}) + E_{c(f,g)}^{(f)} \nu^{(f)}(P^{(f)}(g)) \right) \\
 &= d(g) \left(\sum_{k=1}^{c(f,g)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) A_k^{(f)} + E_{c(f,g)}^{(f)} K(f, g) \right),
 \end{aligned}$$

et la première égalité de l'énoncé est démontrée. Afin de prouver la seconde, usons le Lemme 5.6, qui nous permet d'exprimer $\bar{A}_{c(f,g)+1}^{(f)}$ en fonction des $A_k^{(f)}$. Nous en déduisons :

$$\sum_{k=1}^{c(f,g)-1} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) A_k^{(f)} = E_{c(f,g)-1}^{(f)} \bar{A}_{c(f,g)}^{(f)} - E_{c(f,g)-1}^{(f)} A_{c(f,g)}^{(f)}.$$

En remplaçant cette égalité dans la précédente et en usant les relations (5.8), nous obtenons la deuxième égalité de l'énoncé.

Ensuite, si $K(f, g) = A_q^{(f)}$, on a $c(f, g) = q - 1$. En appliquant la formule précédente et à nouveau les relations (5.8), nous obtenons la relation voulue. \square

En combinant les Propositions 5.2, 5.3, 5.5 et 5.9, on obtient.

Proposition 5.10. *Si $f, g \in \mathcal{U}_d$ réduits sont LQO comparables, les données suivantes sont équivalentes :*

- (i) la famille de contact de g par rapport à f ;
- (ii) la 0-chaîne $\rho^{(f)}([g]^{(f)})$ supportée par $\theta_g(f)$;
- (iii) la chaîne de contact $[g]^{(f)}$;
- (iv) l'ensemble des r -uplets $((f_i, h)/d(h))_{i \in I(f)}$, chaque r -uplet étant compté autant de fois que la somme des degrés des facteurs h de g qui le réalisent, où $r = \#I(f)$.

6. La chaîne de contact de la dérivée

Dans cette section, nous appliquons l'étude qui précède au calcul de la chaîne de contact $[f_Y]^{(f)}$ de la dérivée d'un polynôme LQO, lorsque cette dérivée est elle-même quasi-ordinaire. On obtient ainsi dans le Théorème 6.3 une généralisation du théorème de décomposition en paquets des courbes polaires génériques [3–6], tel qu'il a été reformulé dans [19]. Nous explicitons ce résultat dans le cas où le polynôme initial est irréductible (Proposition 6.4).

Tout au long de la section on suppose que f est réduit.

Lemme 6.1. *On a l'égalité :*

$$\rho^{(f)}([f_Y]^{(f)}) = \rho^{(f)}([f]^{(f)}) - [f]^{(f)}.$$

Démonstration. A l'aide de la formule (5.2) :

$$\begin{aligned}
\rho^{(f)}([f_Y]^{(f)}) &= \sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\eta \in R(f_Y)} P(\xi, \eta) \\
&= \sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\xi' \in R(f) - \{\xi\}} P(\xi, \xi') \\
&= \sum_{\xi \in R(f)} \sum_{\xi' \in R(f)} P(\xi, \xi') - \sum_{\xi \in R(f)} P(\xi, \xi) \\
&= \rho^{(f)}([f]^{(f)}) - \sum_{\xi \in R(f)} P^{(f_\xi)}(+\infty) \\
&= \rho^{(f)}([f]^{(f)}) - \sum_{i \in I(f)} d(f_i) P^{(f_i)}(+\infty) \\
&= \rho^{(f)}([f]^{(f)}) - [f]^{(f)}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 6.2. On a l'égalité :

$$s([f_Y]^{(f)}) = s([f]^{(f)}) - \gamma^{(f)}.$$

Démonstration. Considérons l'égalité obtenue à la proposition précédente. En appliquant le morphisme s on en déduit, pour tout sommet P du complexe simplicial considéré :

$$\langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f_Y]^{(f)}) \rangle = \langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f]^{(f)}) \rangle - \langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle.$$

En appliquant ensuite deux fois la Proposition 5.4, d'abord pour $\phi = f_Y$, puis pour $\phi = f$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{P}, s([f_Y]^{(f)}) \rangle &= \frac{\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle \langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f_Y]^{(f)}) \rangle}{\langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle} \\
&= \frac{\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle (\langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f]^{(f)}) \rangle - \langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle)}{\langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle} \\
&= \frac{\langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle \langle \hat{P}, \sigma^{(f)}([f]^{(f)}) \rangle}{\langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle} - \langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle \\
&= \langle \hat{P}, s([f]^{(f)}) \rangle - \langle \hat{P}, \gamma^{(f)} \rangle.
\end{aligned}$$

Mais les cochaînes \hat{P} forment une base du groupe C^1 des 1-cochaînes, et la proposition est démontrée. □

Théorème 6.3. Si $f \in \mathcal{C}_d$ est réduit, on a l'égalité suivante de 0-cochaînes dans l'arbre d'Eggers $\theta(f)$:

$$[f_Y]^{(f)} = [f]^{(f)} - \partial\gamma^{(f)} - P(-\infty).$$

Le support de $[f_Y]^{(f)}$ est formé des sommets P de $\theta(f)$ pour lesquels $\nu^{(f)}(P)$ est fini.

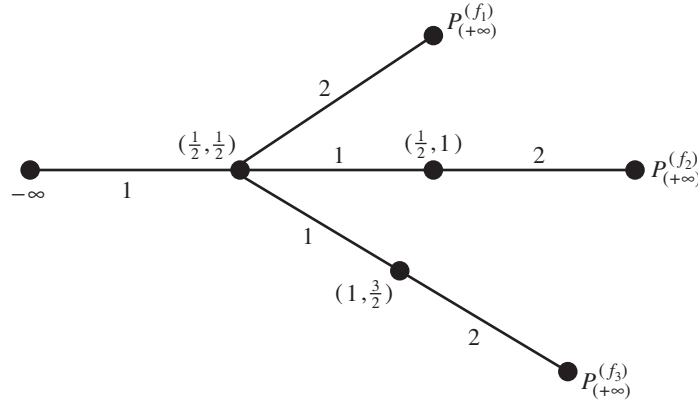


Figure 5.

Démonstration. Reprenons la suite exacte (5.3). En appliquant le morphisme ∂ à l'égalité de la Proposition 6.2 on obtient l'existence d'un nombre entier x tel que :

$$[f_Y]^{(f)} = [f]^{(f)} - \partial\gamma^{(f)} + xP(-\infty).$$

Pour trouver x , appliquons le morphisme ϵ . En usant le fait que $\epsilon([f_Y]^{(f)}) = d(f_Y) = d(f) - 1$, $\epsilon([f]^{(f)}) = d(f)$, $\epsilon \circ \partial = 0$, on en déduit que $x = -1$.

Le support de $[f]^{(f)} - \partial\gamma^{(f)} - P(-\infty)$ est évidemment contenu dans l'ensemble des sommets de $\theta(f)$ de valeur finie, puisque les coefficients des sommets $P(-\infty)$, $P^{(f_i)}(+\infty)$ sont tous nuls. Pour montrer l'égalité, soit P un sommet avec $\nu^{(f)}(P) \in \mathbf{Q}^d$, son coefficient dans la 0-chaîne $[f]^{(f)}$ est donc nul. Quant à celui dans la 0-chaîne $-\partial\gamma^{(f)}$, c'est la somme des coefficients dans $\gamma^{(f)}$ des segments qui partent de P , à laquelle on a soustrait le coefficient du segment qui arrive en P . Si de P part un seul segment, cela signifie que P provient d'un sommet de l'un des arbres $\theta(f_i)$, et son coefficient est ainsi strictement supérieur à celui du segment arrivant en P . Si de P partent au moins deux segments, leurs coefficients sont supérieurs ou égaux à celui du segment arrivant en P , et de nouveau la différence est strictement positive. \square

Exemple. Reprenons l'exemple qui précède la Proposition 4.4. Le fait que le polynôme f est de la forme $g(Y^2)$, avec $d(g) = 3$ permet de résoudre explicitement par radicaux carrés l'équation $f_Y = 0$. On voit ainsi que ses racines appartiennent à $\widehat{\mathbf{C}}[[X]]$ et qu'elles admettent comme termes dominants 0 , $\sqrt{2/3}X_1X_2$, $-\sqrt{2/3}X_1X_2$, $(1/\sqrt{6})X_1^{1/2}X_2$, $-(1/\sqrt{6})X_1^{1/2}X_2$. Ceci montre que ces racines sont deux à deux comparables, et le polynôme f_Y est donc LQO, par la Proposition 2.5. On est alors dans les conditions d'applicabilité de la proposition 6.3. Le complexe simplicial $\theta(f)$, pour lequel on a indiqué les valeurs des sommets et les coefficients de la chaîne des extensions de f , est donné dans le Figure 5.

On en déduit la 0-chaîne $[f_Y]^{(f)}$ (voir Figure 6).

Explicitons la 0-chaîne $[f_Y]^{(f)}$ dans le cas où f est irréductible.

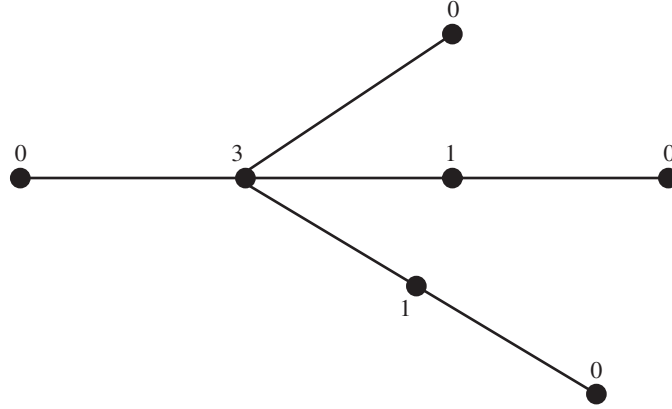


Figure 6.

Proposition 6.4. *Si $f \in \mathcal{I}_d \cap \mathcal{C}_d$, alors :*

$$[f_Y]^{(f)} = \sum_{k=1}^{G(f)} \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) P_k^{(f)}.$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, omettons l'exposant (f) . Grâce au Théorème 6.3 et à la définition (3.1) de la chaîne des extensions, on obtient :

$$\begin{aligned} [f_Y] &= [f] - \partial\gamma - P(-\infty) \\ &= d(f)P(+\infty) - \sum_{k=0}^G \frac{d(f)}{E_k} (P_{k+1} - P_k) - P(-\infty) \\ &= \sum_{k=0}^G \left(\frac{d(f)}{E_k} - \frac{d(f)}{E_{k-1}} \right) P_k. \end{aligned}$$

Une autre preuve de ce résultat est donnée dans la §7. □

Remarque (faisant suite à la remarque achevant la §2). Les résultats de cette section s'étendent aux séries Y -distinguées quasi-ordinaires dont la dérivée $\partial f/\partial Y$ est aussi quasi-ordinaire. Il suffit de remarquer pour cela que la Proposition-clé 4.4 s'étend à ce contexte, car pour tout $g \in \mathcal{C}[[X, Y]]$ qui est Y -distingué, $\mathcal{N}(g) = \mathcal{N}(\tilde{g})$. Cette remarque permet d'appliquer les résultats de cette section à l'étude des germes d'hyper-surfaces quasi-ordinaires. En effet, lors de cette étude on ne peut se ramener simplement à l'aide du théorème de préparation de Weierstrass au cas où f et $\partial f/\partial Y$ sont à la fois des polynômes en Y , car si $f = u\tilde{f}$ alors $\partial f/\partial Y = u(\partial\tilde{f}/\partial Y) + \tilde{f}(\partial u/\partial Y)$, qui n'est pas forcément le produit de $\partial\tilde{f}/\partial Y$ par une unité.

7. Une autre approche dans le cas irréductible

Dans cette section nous donnons une preuve différente du Théorème 6.3, lorsque le polynôme LQO considéré est irréductible. Cette preuve est dans l'esprit de l'article [15].

Tout au long de la section, nous supposons que $f \in \mathcal{U}_d$ est LQO irréductible.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, le premier théorème de structure des hypersurfaces polaires a été obtenu par Merle dans [15] pour les germes de courbes irréductibles. En fait cette preuve use une seule information sur la dérivée du polynôme considéré, son nombre d'intersection avec le polynôme initial. Une information analogue est disponible aussi dans notre contexte.

Proposition 7.1. *Si $f \in \mathcal{C}_d$ est irréductible, alors :*

$$\begin{aligned} (f, f_Y) &= v_X(\Delta_Y(f)) \\ &= d(f) \sum_{k=1}^{G(f)} (E_{k-1}^{(f)} - E_k^{(f)}) A_k^{(f)} \\ &= d(f) \sum_{k=1}^{G(f)} (N_k^{(f)} - 1) \bar{A}_k^{(f)}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, on omettra d'écrire l'exposant (f) . Rappelons que \mathcal{C}_d est défini au début de la § 4.

Par la formule (2.2) :

$$\begin{aligned} v_X(\Delta_Y(f)) &= \sum_{\substack{\xi, \xi' \in R(f) \\ \xi \neq \xi'}} v_X(\xi - \xi') \\ &= \sum_{\xi' \in R(f)} \sum_{\substack{\xi \in R(f) \\ \xi \neq \xi'}} K(\xi, \xi'). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Appliquons à présent la Proposition 2.14 pour $g = f$. On a dans ce cas $c(f, f) = G$ et $E_G = 1$. Donc

$$\bigsqcup_{\substack{\xi \in R(f) \\ \xi \neq \xi'}} \{K(\xi, \xi')\} = \bigsqcup_{k=1}^G \left(\bigsqcup_{E_{k-1} - E_k} \{A_k\} \right).$$

D'où, en reprenant l'égalité (7.2) :

$$\begin{aligned} v_X(\Delta_Y(f)) &= \sum_{\xi' \in R(f)} \left(\sum_{k=1}^G (E_{k-1} - E_k) A_k \right) \\ &= d(f) \left(\sum_{k=1}^G (E_{k-1} - E_k) A_k \right). \end{aligned}$$

L'égalité $\sum_{k=1}^G (E_{k-1} - E_k) A_k = \sum_{k=1}^G (N_k - 1) \bar{A}_k$ s'obtient facilement à l'aide des relations de définition des \bar{A}_k . \square

Dans ce qui suit, nous prouvons que la formule (7.1) suffit aussi dans le cas des polynômes LQO à obtenir le théorème de structure 6.3, sous la forme donnée dans la Proposition 6.4. C'est le contenu de la Proposition 7.7. Mais auparavant, nous avons besoin de quelques développements préliminaires.

Lemme 7.2. Pour tout $q \in \{0, \dots, G(f)\}$, on a :

$$M_q^{(f)} = \mathbf{Z}^d + \mathbf{Z}\bar{A}_1^{(f)} + \dots + \mathbf{Z}\bar{A}_q^{(f)}.$$

Démonstration. Ceci résulte immédiatement des définitions (5.8) et (2.5). \square

Lemme 7.3. Soit $\xi \in R(f)$ quelconque et $A \in \text{Supp}(\xi)$. Si on pose

$$q := \max\{k, A_k^{(f)} \leq_t A\},$$

alors $A \in M_q^{(f)}$.

Démonstration. Soit $\sigma \in \text{Gal}(L_{G(f)}^{(f)} : L_q^{(f)})$ quelconque. Alors σ fixe tous les monômes $X^{A_1^{(f)}}, \dots, X^{A_q^{(f)}}$, donc

$$v_X(\sigma(\xi) - \xi) >_t A_q^{(f)} \Rightarrow v_X(\sigma(\xi) - \xi) \geq_t A_{q+1}^{(f)} \Rightarrow \sigma(X^A) = X^A,$$

par la définition de q . Comme ceci est vrai pour σ quelconque, la théorie de Galois implique que

$$X^A \in L_q^{(f)} \stackrel{2.9}{=} L[X^{M_q^{(f)}}].$$

On en déduit facilement que $A \in M_q^{(f)}$. \square

Lemme 7.4. Soient $q \in \{1, \dots, G(f)\}$ et $m \in \mathbf{Z}$. Alors :

$$m\bar{A}_q^{(f)} \in M_{q-1}^{(f)} \Leftrightarrow mA_q^{(f)} \in M_{q-1}^{(f)} \Leftrightarrow N_q^{(f)} \mid m.$$

Démonstration. Par la définition (5.8) et le Lemme 7.2 on a :

$$m\bar{A}_q^{(f)} \in M_{q-1}^{(f)} \Leftrightarrow mA_q^{(f)} \in M_{q-1}^{(f)} \Leftrightarrow mA_q^{(f)} = 0 \text{ dans } M_q^{(f)}/M_{q-1}^{(f)}.$$

Mais $M_q^{(f)}/M_{q-1}^{(f)}$ est un groupe cyclique engendré par la classe de $A_q^{(f)}$. Par le Lemme 2.9 :

$$|M_q^{(f)}/M_{q-1}^{(f)}| = [L_q^{(f)} : L_{q-1}^{(f)}] = E_{q-1}^{(f)} : E_q^{(f)} = N_q^{(f)}.$$

Ceci montre que l'ordre de $A_q^{(f)}$ dans $M_q^{(f)}/M_{q-1}^{(f)}$ est $N_q^{(f)}$, ce qui est équivalent à la propriété voulue. \square

Lemme 7.5. Si $h \in \mathcal{I}_d$ est LQO comparable à f et $K(f, h) >_t A_q^{(f)}$, $q \in \{1, \dots, G(f)\}$, alors $d(f)/E_q^{(f)} \mid d(h)$. En particulier $d(h) \geq d(f)/E_q^{(f)}$.

Démonstration. Si $h \in \mathcal{I}_d$ est comparable à f et $K(f, h) >_t A_q^{(f)}$, cela signifie que les q premiers exposants caractéristiques de h coïncident avec ceux de f , donc $L_q^{(h)} = L_q^{(f)}$. Mais

$$d(h) \stackrel{(2.6)}{=} [L_{G(h)}^{(h)} : L_q^{(h)}] \cdot [L_q^{(h)} : L],$$

d'où :

$$[L_q^{(f)} : L] \mid d(h) \stackrel{(2.4)}{\Leftrightarrow} \frac{d(f)}{E_q^{(f)}} \mid d(h)$$

et le lemme est démontré. \square

Lemme 7.6. Si $h \in \mathcal{I}_d$ est LQO comparable à f et $K(f, h) <_t A_{q+1}^{(f)}$, $q \in \{0, \dots, G(f)\}$, alors $(f, h) \in d(f)M_q^{(f)}$.

Démonstration. On peut supposer que l'indice q de l'énoncé est minimum parmi ceux qui vérifient $K(f, h) <_t A_{q+1}^{(f)}$. On va considérer deux cas, suivant que l'ordre de coïncidence $K(f, h)$ est ou non un exposant caractéristique de f .

(1) Supposons que $K(f, h) = A_q^{(f)}$.

La Proposition 5.9 montre que $(f, h) = d(h)E_{q-1}^{(f)}\bar{A}_q^{(f)}$. Comme $K(f, h) >_t A_{q-1}^{(f)}$, d'après le Lemme 7.5, $d(f)/E_{q-1}^{(f)} \mid d(h)$, donc :

$$(f, h) \in \mathbf{Z}d(f)\bar{A}_q^{(f)} \subset d(f)M_q^{(f)}.$$

(2) Supposons que $A_{q-1}^{(f)} <_t K(f, h) <_t A_q^{(f)}$.

La Proposition 5.9 montre que :

$$(f, h) = d(h)E_{q-1}^{(f)}\bar{A}_q^{(f)} - d(h)E_q^{(f)}A_q^{(f)} + d(h)E_q^{(f)}K(f, h). \quad (7.3)$$

Par le Lemme 7.5, $d(f)/E_{q-1}^{(f)} \mid d(h)$, ce qui montre que $d(h)(E_{q-1}^{(f)}/d(f)) \in \mathbf{Z}$ et $d(h)(E_q^{(f)}/d(f)) \in \mathbf{Z}$. Donc par le Lemme 7.2, les deux premiers termes du membre droit de (7.3) appartiennent à $d(f)M_q^{(f)}$. Il suffit donc de prouver que :

$$d(h)E_q^{(f)}K(f, h) \in d(f)M_q^{(f)}. \quad (7.4)$$

Considérons deux sous-cas, suivant que $K(f, h) \in M_q^{(f)}$ ou non.

(2.1) Supposons que $K(f, h) \in M_q^{(f)}$.

Par le Lemme 7.5,

$$\frac{d(f)}{E_q^{(f)}} \mid d(h) \Rightarrow d(h)E_q^{(f)}K(f, h) \in \mathbf{Z}d(f)K(f, h) \subset d(f)M_q^{(f)},$$

ce qui démontre (7.4) dans ce cas.

(2.2) Supposons que $K(f, h) \notin M_q^{(f)}$.

Si $K(f, h)$ est dans le support d'une racine de f , l'hypothèse $A_{q-1}^{(f)} <_t K(f, h) <_t A_q^{(f)}$ et le Lemme 7.3 montrent que $K(f, h) \in M_q^{(f)}$, ce qui est une contradiction.

Donc $K(f, h)$ est forcément dans le support d'une racine de h et comme $K(f, h) \notin M_q^{(f)} = M_q^{(h)}$, le même argument que précédemment montre que $K(f, h)$ est forcément le $(q+1)$ -ème exposant caractéristique de h : $K(f, h) = A_{q+1}^{(h)}$.

Par le Lemme 7.4,

$$N_{q+1}^{(h)}K(f, h) \in M_q^{(h)} = M_q^{(f)} \xrightarrow{7.2} N_{q+1}^{(h)}d(f)K(f, h) \in d(f)M_q^{(f)}.$$

Mais

$$\frac{d(h)}{E_{q+1}^{(h)}} = N_{q+1}^{(h)} \frac{d(h)}{E_q^{(h)}} \stackrel{3.3}{=} N_{q+1}^{(h)} \frac{d(f)}{E_q^{(f)}} \Rightarrow N_{q+1}^{(h)}d(f) \mid E_q^{(f)}d(h),$$

ce qui nous permet de conclure. \square

Enfin, nous pouvons prouver la proposition principale de cette section.

Proposition 7.7. *Si $f \in \mathcal{I}_d$ et $g \in \mathcal{U}_d$ sont LQO comparables et que $q \in \{1, \dots, G(f)\}$, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$(1) \quad d(g) = \frac{d(f)}{E_q^{(f)}} - 1 \text{ et } (f, g) = d(f) \sum_{k=1}^q (N_k^{(f)} - 1) \bar{A}_k^{(f)} ;$$

$$(2) \quad [g]^{(f)} = \sum_{k=1}^q \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) P_k^{(f)}.$$

Démonstration. (2) \Rightarrow (1). Appliquons la Proposition 5.8 :

$$\begin{aligned} (f, g) &= \nu^{(f)} \circ \rho^{(f)}([g]^{(f)}) \\ &= \sum_{k=1}^q \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) \nu^{(f)}(\rho^{(f)}(P_k^{(f)})) \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \sum_{k=1}^q \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) \left(\sum_{j=1}^{k-1} (E_{j-1}^{(f)} - E_j^{(f)}) A_j^{(f)} + E_{k-1}^{(f)} A_k^{(f)} \right) \\ &\stackrel{(5.6)}{=} \sum_{k=1}^q \left(\frac{d(f)}{E_k^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{k-1}^{(f)}} \right) E_{k-1}^{(f)} \bar{A}_k^{(f)} \\ &= d(f) \sum_{k=1}^q (N_k^{(f)} - 1) \bar{A}_k^{(f)}. \end{aligned}$$

(1) \Rightarrow (2). Nous allons prouver l'implication par récurrence sur q . Pour $q = 0$ elle est évidente. Supposons-la vraie pour $q - 1 \geq 0$ et montrons-la pour q . Nous indiquons par le symbole ' \bullet ' les points d'articulation du raisonnement.

- S'il existe $i \in I(g)$ tel que $K(f, g_i) >_t A_q^{(f)}$, par le Lemme 7.5 nous avons $d(g_i) \geq d(f)/E_q^{(f)}$, ce qui contredit l'hypothèse $d(g) = d(f)/E_q^{(f)} - 1$. Donc :

$$\forall i \in I(g), \quad K(f, g_i) \leq_t A_q^{(f)}. \quad (7.5)$$

- Si pour tout $i \in I(g)$, on a $K(f, g_i) <_t A_q^{(f)}$, par le Lemme 7.6,

$$\begin{aligned} \forall i \in I(g), \quad (f, g_i) \in d(f)M_{q-1}^{(f)} &\Rightarrow (f, g) \in d(f)M_{q-1}^{(f)} \\ &\Rightarrow d(f) \sum_{k=1}^q (N_k^{(f)} - 1) \bar{A}_k^{(f)} \in d(f)M_{q-1}^{(f)}, \end{aligned}$$

et le Lemme 7.2 implique $d(f)(N_q^{(f)} - 1) \bar{A}_q^{(f)} \in d(f)M_{q-1}^{(f)}$, ce qui contredit le Lemme 7.4. De la propriété (7.5) on déduit :

$$\exists i \in I(g), \quad K(f, g_i) = A_q^{(f)}. \quad (7.6)$$

- Ecrivons $g = h \cdot h'$, où h' est le produit des facteurs g_i tels que $K(f, g_i) = A_q^{(f)}$. Par (7.6), $d(h') \geq 1$ et $\forall j \in I(h)$, $K(f, h_j) <_t A_q^{(f)}$. Par la Proposition 5.9, si $g_i \mid h'$ on a : $(f, g_i) = d(g_i)E_{q-1}^{(f)}\bar{A}_q^{(f)}$. Mais par le Lemme 7.5, $d(f)/E_{q-1}^{(f)} \mid d(g_i)$, d'où

$$(f, g_i) \in \mathbf{Z}d(f)\bar{A}_q^{(f)} \quad \Rightarrow \quad (f, h') \in \mathbf{Z}d(f)\bar{A}_q^{(f)}.$$

Soit donc $x \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$(f, h') = xd(f)\bar{A}_q^{(f)}.$$

Comme $(f, h') = d(h')E_{q-1}^{(f)}\bar{A}_q^{(f)}$ (on somme sur les $g_i \mid h'$), on déduit :

$$x = d(h') \frac{E_{q-1}^{(f)}}{d(f)}.$$

Mais $d(h') \leq d(g) < d(f)/E_q^{(f)}$, donc :

$$x \leq N_q^{(f)} - 1.$$

- On obtient :

$$(f, h) = (f, g) - (f, h') = d(f) \sum_{k=1}^{q-1} (N_k^{(f)} - 1) \bar{A}_k^{(f)} + d(f)(N_q^{(f)} - 1 - x) \bar{A}_q^{(f)},$$

$$0 \leq N_q^{(f)} - 1 - x \leq N_q^{(f)} - 1.$$

Mais $\forall j \in I(h)$, $K(f, h_j) <_t A_q^{(f)}$ et par le Lemme 7.6 on déduit $(f, h) \in H_{q-1}^{(f)}$. Le Lemme 7.2 implique alors que $d(f)(N_q^{(f)} - 1 - x) \bar{A}_q^{(f)} \in H_{q-1}^{(f)}$ et grâce au Lemme 7.4 on voit que :

$$x = N_q^{(f)} - 1.$$

Donc :

$$d(h') = \frac{d(f)}{E_q^{(f)}} - \frac{d(f)}{E_{q-1}^{(f)}}, \quad (f, h') = d(f)(N_q^{(f)} - 1) \bar{A}_q^{(f)}.$$

On déduit que h vérifie les hypothèses du point (1) à l'ordre $q - 1$ et la récurrence est complétée. □

Remarque. En combinant les Propositions 5.2, 5.3, 5.5, 7.1, 7.7, on voit que, dans le cas où $f \in \mathcal{C}_d$ est irréductible, les deux types d'informations initiales permettant le calcul de la 0-chaîne $[f_Y]^{(f)}$ sont équivalentes. Il s'agit d'une part de la famille de contact de f_Y avec f et d'autre part du vecteur d'intersection (f, f_Y) .

Remerciements. Cette étude a été motivée par des questions de B. Teissier, dont les suggestions ont été des plus utiles, je l'en remercie vivement. Je remercie aussi E. García Barroso, E. Ghys, P. D. González Pérez, A. Némethi, O. Neto, J. J. Risler et B. Sévenec pour leurs remarques.

Références

1. S. S. ABHYANKAR, On the ramification of algebraic functions, *Am. J. Math.* **77** (1955), 575–592.
2. S. S. ABHYANKAR AND A. ASSI, Jacobian of meromorphic curves, *Proc. Ind. Natl. Sci. Acad.* **109** (1999), 117–163.
3. H. EGGERS, Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten, *Bonn. Math. Schriften* **147** (1983).
4. E. GARCÍA BARROSO, Invariants des singularités de courbes planes et courbures des fibres de Milnor, Thèse, Universidad de la Laguna, Tenerife, Espagne, LMENS-96–35, ENS (1996).
5. E. GARCÍA BARROSO, Un théorème de décomposition pour les polaires génériques d’une courbe plane, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **326** (1998), 59–62.
6. E. GARCÍA BARROSO, Sur les courbes polaires d’une courbe plane réduite, *Proc. Lond. Math. Soc.* **81** (2000), 1–28.
7. E. GARCÍA BARROSO AND P. GONZÁLEZ PÉREZ, Decomposition in bunches of the critical locus of a quasi-ordinary map, submitted.
8. P. GONZÁLEZ PÉREZ, Quasi-ordinary singularities via toric geometry, Thèse, Universidad de la Laguna, Tenerife, Espagne (2000).
9. H. W. E. JUNG, Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a, y = b$, *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908), 289–314.
10. T.-C. KUO AND Y. C. LU, On analytic function-germs of two complex variables, *Topology* **16** (1977), 299–310.
11. D. T. LÊ, F. MICHEL AND C. WEBER, Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes, *Compositio Math.* **72** (1989), 87–113.
12. LÊ, D. T., F. MICHEL, C. WEBER, Courbes polaires et topologie des courbes planes, *Annl. Sci. Ec. Norm. Supér.* **24** (1991), 141–169.
13. J. LIPMAN, Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces, Thesis, Harvard University (1965).
14. J. LIPMAN, Topological invariants of quasi-ordinary singularities, *Mem. Am. Math. Soc.* **388** (1988), 1–107.
15. M. MERLE, Invariants polaires des courbes planes, *Invent. Math.* **41** (1977), 103–111.
16. M. MERLE, Polyèdre de Newton, éventail et désingularisation, d’après A. N. Varchenko, dans *Séminaire sur les singularités de surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 777 (1980), pp. 289–294.
17. P. POPESCU-PAMPU, Arbres de contact des singularités quasi-ordinaires et graphes d’adjacence pour les 3-variétés réelles, Thèse, Université Paris 7 (2001).
18. B. TEISSIER, Variétés polaires, I, Invariants polaires des singularités d’hypersurfaces, *Invent. Math.* **40** (1977), 267–292.
19. C. T. C. WALL, *Decompositions of polar curves*, Manuscrit (2000).
20. O. ZARISKI, General theory of saturation and of saturated rings, II, Saturated rings of dimension 1, *Am. J. Math.* **93** (1971), 872–964.